PROVA PRATICA di CALCOLO NUMERICO

per Matematica Applicata e Informatica Multimediale

Prof. Stefano De Marchi, Dott. Marco Caliari

`Verona, 08 luglio 2008`

Il candidato dovrà scrivere su **ogni** foglio o file che intende consegnare cognome, nome e numero di matricola. Dovrà inoltre produrre uno o più files `.m` contenenti tutte le istruzioni, **dettagliatamente** commentate, necessarie al completo svolgimento degli esercizi. Tutti i files, opportunamente compressi, devono essere inviati via email a `marco.caliari@univr.it`.

1. Sia data la funzione $f(x) = x + \log x$ nel proprio insieme di definizione D.

   (a) Dimostrare che l'equazione $f(x) = 0$ ha un unico zero, indicato con α.

   (b) Sia $x_0 \in D$ un punto a sinistra di α e $y_0 \in D$ un punto a destra. Quali di questi due punti, se usati come punti iniziali del metodo di Newton, assicura la convergenza alla radice? Motivare la risposta.

   (c) Applicare il metodo di Newton con un opportuno punto iniziale ed approssimare lo zero in modo che la tolleranza per l'errore relativo sia inferiore a 10^{-8}.

   (d) Date le seguenti funzioni

   $$\begin{aligned} g_1(x) &= -\log x \\ g_2(x) &= e^{-x} \\ g_3(x) &= \frac{x + e^{-x}}{3} \\ g_4(x) &= \frac{x(1 - \log x)}{x + 1} \end{aligned}$$

   dire quali sono funzioni di iterazione di punto fisso per risolvere l'equazione $f(x) = 0$, quali assicurano convergenza e con che ordine. Motivare le risposte.

2. I seguenti punto vanno risolti senza l'uso della funzione `eig`.

   (a) Si enunci una condizione necessaria e sufficiente sugli autovalori di una matrice affinché un metodo iterativo per la risoluzione di sistemi lineari sia convergente.

   (b) Si consideri la matrice

   $$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   Si implementi il metodo più adatto per verificare la condizione del punto precedente, qualora si usi il metodo iterativo di Jacobi per la soluzione di un sistema lineare di matrice A. Si dica, senza testarlo, se tale metodo converge.

   (c) Si calcoli l'autovalore più piccolo in modulo della matrice di iterazione del metodo di Jacobi, con una tolleranza sull'errore assoluto inferiore a 10^{-4}.

3. Si consideri la funzione $f(x) = x \sin\left(x - \frac{1}{3}\right) \mathtt{e}^{x^3}$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

   (a) Si determini il numero di punti necessari per calcolare $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ con il metodo dei trapezi composito a meno di $\mathtt{tol} = 10^{-9}$.

   (b) Si verifichi che la *tecnica di Romberg*, per il calcolo dell'integrale a meno di `tol`, richiede un numero di punti circa 3000 volte inferiore (si usi la funzione `quadl` per ottenere il valore di riferimento dell'integrale).

◊◊

Tempo: **3 ore**.

SOLUZIONI

Es. 1. (a) Il dominio di $f(x)$ è $x > 0$, il limite per $x \to 0^+$ è $-\infty$ ed è strettamente crescente, oltre che continua. Dunque, ha un'unica radice.

(b) x_0, per il teorema di convergenza globale del metodo di Newton. O anche osservando il grafico: è chiaro che se si parte da x_0, si rimane sempre tra x_0 e α.

(c) Partendo a sinistra di *alpha*, si converge in circa 6 iterazioni. Occorre stare attenti all'errore relativo. Metodo di Newton

```
function [x,iter,errest] = newton(fun,fun1,x0,tol,maxit,varargin)
%
% [x,iter,errest] = newton(fun,fun1,x0,tol,maxit,varargin)
%
x = x0;
iter = 1;
errest = -feval(fun1,x,varargin{:})\feval(fun,x,varargin{:});
while (norm(errest) > tol) & (iter < maxit)
  x = x0+errest;
  iter = iter+1;
  errest = -feval(fun1,x,varargin{:})\feval(fun,x,varargin{:});
  x0 = x;
end
errest = norm(errest)/norm(x);
if (errest > tol)
  warning('Impossibile raggiungere la tolleranza richiesta')
  warning('entro il numero massimo di iterazioni consentito.')
end
```

(d) $g_3(x)$ non è funzione di iterazione. Poi

$$\begin{aligned}
g_1'(\alpha) &= -\frac{1}{\alpha} \approx -2 \\
g_2'(\alpha) &= -e^{-\alpha} \approx -0.6 \\
g_4'(\alpha) &= \frac{((1-\log\alpha)-1)(\alpha+1)-\alpha(1-\log\alpha)}{(\alpha+1)^2} = \frac{-\log\alpha-\alpha}{(\alpha+1)^2} = 0
\end{aligned}$$

e dunque, g_1 non converge, g_2 converge linearmente, g_4 converge almeno quadraticamente.

Es. 2. (a) Il raggio spettrale della matrice di iterazione deve essere minore di 1.

(b) Metodo delle potenze, che può essere implementato come segue

```
function [lambda,y] = potenze(L,varargin)
%
```

```
% lambda = potenze(L) (potenze dirette)
%
% oppure
%
% lambda = potenze(L,U,P) (potenze inverse)
%
x = rand(size(L,2),1);
y = x/norm(x);
if (nargin == 3)
  U = varargin{1};
  P = varargin{2};
  z = L\(P*y);
  x = U\z;
else
  x = L*y;
end
lambda = y'*x;
lambda0 = lambda;
y = x/norm(x);
tol = 1e-4;
errest = tol+1;
while (errest > tol)
  if (nargin == 3)
    z = L\(P*y);
    x = U\z;
  else
    x = L*y;
  end
  lambda = y'*x;
  errest = abs(lambda-lambda0);
  y = x/norm(x);
  lambda0 = lambda;
end
if (nargin == 3)
  lambda = 1/lambda;
end
```

(c) Metodo delle potenze inverse. Gli autovalori sono $-1.2071, 0.20711, 1.0001$.

Es. 3. (a) Basta applicare la formula dell'errore di quadratura trapezoidale e chiedere che in valore assoluto sia minore di `tol`.

Nella fattispecie, sapendo che $f''(x) = (6x^3 + 2) * EC + (9x^5 + 12x^2 - x) * ES$ dove $EC = e^{x^3} \cos\left(x - \frac{1}{3}\right)$ ed $ES = e^{x^3} \sin\left(x - \frac{1}{3}\right)$. Pertanto, applicando la formula dell'errore (6.30) di pag. 186 delle dispense, si ottiene che il valore N di punti equispaziati per approssimare l'integrale a meno di *tol* è

$$N \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\, tol}} = 183862\,.$$

(b) Per rispondere a questo quesito basta applicare il funzione `romberg.m` di pag. 212 delle dispense all'interno del seguente ciclo

```
k=1;
int_value=romberg(@funQuad,a,b,k);
error_romb=abs(int_value-esatto);
while error_romb > tol
    k=k+1;
    int_value=romberg(@funQuad,a,b,k);
    error_romb=abs(int_value-esatto);
end

error_romb

disp(' I punti richiesti con il metodo di Romberg sono ')
2^(k-1)+1
```

dove

```
esatto=quadl(inline('x.*exp(x.^3).*sin(x-1/3)'), -1,1,1.e-9);
```

è considerato il valore esatto dell'integrale calcolato con `quadl`.

Il valore calcolato dopo solo 6 passi del metodo di Romberg, ci dice che i punti necessari sono $2^6 + 1 = 65$.

Pertanto $183862/65 \approx 2828$, ovvero con Romberg servono un numero di punti circa 3000 volte inferiore.