4 Limiti

4.1 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n}, \quad a > 1$$

4.1.1 Risoluzione

Poniamo $x = \sqrt{a} - 1$. Per la disuguaglianza di Bernoulli 3.3,

$$\left(\sqrt{a}\right)^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > nx$$

e dunque

$$\frac{a^n}{n} > \frac{n^2 x^2}{n} = nx^2$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

4.2 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty, \quad a > 1$$

seguendo la dimostrazione dell'Esercizio 3.14.

4.3 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty, \quad a > 1$$

4.3.1 Risoluzione

Dato $x > 1$, definiamo *parte intera* di x (e la indichiamo con $[x]$ oppure $\lfloor x \rfloor$) il numero intero più vicino a x e tale che $[x] \leq x$. Allora si ha

$$1 \leq \frac{x}{[x]} < 2, \quad 0 \leq x - [x] \leq 1$$

e inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{[x]}}{[x]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Consideriamo adesso la funzione

$$f(x) = \frac{\frac{a^x}{x}}{\frac{a^{[x]}}{[x]}} = \frac{a^x}{a^{[x]}}\frac{[x]}{x} = a^{x-[x]}\frac{[x]}{x}.$$

Per le disuguaglianze viste, si ha

$$1 \cdot \frac{1}{2} < f(x) \leq a \cdot 1.$$

Dunque,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$$

altrimenti, per $x > M$, si avrebbe $f(x) < 1/2$.

4.4 Esercizio

Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n\pi)$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(x\pi)$$

4.4.1 Risoluzione

La successione $\{\sin(n\pi)\}_n$ è una successione che vale costantemente 0 e dunque il suo limite è 0. Il secondo limite invece non esiste, poiché preso comunque M, esiste $x > M$ con $|\sin(x\pi) - \ell| \geq 1/2$, qualunque sia $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$.

4.5 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p}, \quad a > 1,\ p \geq 0$$

4.5.1 Risoluzione

Poniamo $y = a^{1/(p+1)} - 1$. Per la disuguaglianza di Bernoulli 3.3,

$$\left(a^{1/(p+1)}\right)^n = (1+y)^n \geq 1 + ny > ny$$

e dunque

$$\frac{a^n}{n^p} > \frac{n^{p+1}y^{p+1}}{n^p} = ny^{p+1}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty.$$

4.6 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{qx}}{x^p}, \quad a > 1,\ q > 0,\ p \geq 0$$

4.6.1 Risoluzione

Poniamo $y = qx$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{qx}}{x^p} = \lim_{y\to+\infty} \frac{a^y}{(y/q)^p} = \lim_{y\to+\infty} q^p \frac{a^y}{y^p} = +\infty.$$

4.7 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x}, \quad a > 1$$

4.7.1 Risoluzione

Poniamo $y = \log_a x$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{a^y} = 0.$$

4.8 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^q}, \quad a > 1,\ q > 0$$

4.8.1 Risoluzione

Poniamo $y = \log_a x$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^q} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{a^{qy}} = 0.$$

4.9 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^p}{x^q}, \quad a > 1,\ p \geq 0,\ q > 0$$

4.9.1 Risoluzione

Poniamo $y = \log_a x$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log_a x)^p}{x^q} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^p}{a^{qy}} = 0.$$

4.10 Limiti particolari

Si possono dimostrare i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty, \quad a \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

4.11 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - n^2}{n^6 - n!}$$

4.11.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - n^2}{n^6 - n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n\left(1 - \frac{n^2}{e^n}\right)}{n!\left(\frac{n^6}{n!} - 1\right)} = 0.$$

4.12 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \log_2 3^n - \log_2 n^{79/2}$$

4.12.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \log_2 3^n - \log_2 n^{79/2} = \lim_{n\to+\infty} \log_2 \frac{3^n}{n^{79/2}} = +\infty.$$

4.13 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{x\to0^+} x\log_a x = 0, \quad a > 1$$

4.13.1 Risoluzione

Poniamo $y = -\log_a x$. Allora

$$\lim_{x\to0^+} x\log_a x = \lim_{y\to+\infty} a^{-y}\cdot(-y) = 0.$$

4.14 Esercizio

Data $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin(x^{-c})}{x^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, dimostrare che il limite

$$\lim_{x\to0} f(x)$$

vale 0 per $\alpha < 0$ e non esiste per $\alpha \geq 0$.

4.14.1 Risoluzione

Se $\alpha < 0$ si ha
$$0 \leq \left|x^{-\alpha}\right| \cdot \left|\sin(x^{-c})\right| \leq \left|x^{-\alpha}\right| \cdot 1$$
e si conclude per il teorema dei due carabinieri. Se invece $\alpha \geq 0$, considerando le successioni $\{x_n\}_n = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^{(1/c)}$ e $\{y_n\}_n = \left(\frac{1}{n\pi+\pi/2}\right)^{(1/c)}$, si ha che
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$
ma
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \infty.$$

4.15 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin x},$$
al variare di $n \in \mathbb{N}$.

4.15.1 Risoluzione

Si ha
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} n \frac{\sin(nx)}{nx} \frac{x}{\sin x} = n.$$

4.16 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$
al variare di $n \in \mathbb{N}$.

4.16.1 Risoluzione

Poniamo $y = x - \pi$. Se n è pari, allora
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(ny + n\pi)}{\sin(y+\pi)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(ny)}{-\sin y} = -n.$$
Se n è dispari, allora
$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = n$$
(esercizio).

4.17 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

4.17.1 Risoluzione

Moltiplicando numeratore e denominatore per $1 + \cos x$ si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1}{2}.$$

4.18 Esercizio (altre forme indeterminate)

Dall'uguaglianza

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log f(x)}$$

si deduca che le seguenti forme di limite

$$\infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty$$

sono indeterminate.

4.18.1 Risoluzione

Nel prodotto $g(x) \log f(x)$ sono indeterminate le forme di limite $0 \cdot \infty$ (da cui ∞^0 e 0^0) e $\infty \cdot 0$ (da cui 1^∞).

4.19 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} x^x$$

4.19.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x} = 1.$$

4.20 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} x^{(x^x)}$$

4.20.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^x \log x} = 0.$$

4.21 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x$$

4.21.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \log x^x} = 1.$$

4.22 Esercizio

Dimostrare che la funzione logaritmo non è una funzione polinomiale.

4.22.1 Risoluzione

Se, per assurdo, fosse una funzione polinomiale, chiamiamo n il suo grado. Poiché $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ si ha $n > 0$ e poiché $\lim_{x\to+\infty}(\log x)/x = 0$ si ha $n < 1$: assurdo.

4.23 Esercizio

Dimostrare che la funzione logaritmo non è una funzione razionale (cioè rapporto di polinomi).

4.23.1 Risoluzione

Se, per assurdo, fosse una funzione razionale, chiamiamo n ed m rispettivamente il grado del numeratore e del denominatore. Dovrebbe essere contemporaneamente $n > m$ e $n < m + 1$: assurdo.

4.24 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1 - x)$$

4.24.1 Risoluzione

Poniamo $y = -x$. Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \log x \log(1-x) = \lim_{y \to 0^-} (y \log(-y)) \left(\frac{\log(1+y)}{y} \right) = 0.$$

4.25 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{x}}$$

4.25.1 Risoluzione

Raccogliere $\sqrt{x}$ al numeratore e $\sqrt[4]{x}$ al denominatore. Risulta $+\infty$.

4.26 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{x}}$$

4.26.1 Risoluzione

Raccogliere $\sqrt[3]{x}$ al numeratore e $\sqrt[5]{x}$ al denominatore. Risulta 0.

4.27 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$$

4.27.1 Risoluzione

Non esiste, in quanto il limite destro e il limite sinistro sono differenti.

4.28 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1 + \sqrt{e^{x^2} - 1})}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

4.28.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{e^{x^2}-1})}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{e^{x^2}-1})}{x\sin x\sqrt{e^{x^2}-1}} x\sqrt{1+\cos x}\sqrt{e^{x^2}-1} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}\sqrt{e^{x^2}-1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\cos x}\sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}} = \sqrt{2}.$$

4.29 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

4.29.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}.$$

4.30 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}, \quad n,m\in\mathbb{N},\ n,m>0,\ n\neq m$$

4.31 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} x^{x/(1-x)}$$

4.32 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$$

4.32.1 Risoluzione

Poniamo $y = x - 1$. Si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(y+1)}{y} = 1.$$

4.33 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$$

4.33.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x\log x} \log x = -\infty.$$

4.34 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

4.35 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

4.35.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1.$$

4.36 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2+\sin\frac{1}{x}}{x}$$

4.36.1 Risoluzione

Si ha

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2+\sin\frac{1}{x}}{x} \leq \frac{3}{x}$$

e si conclude, per il teorema dei due carabinieri, che il limite vale $+\infty$.

4.37 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x}, \quad 0 < a < 1$$

4.37.1 Risoluzione

Poniamo $y = \log_a x$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{y\to-\infty} \frac{y}{a^y} = \lim_{y\to-\infty} \frac{y}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-y}} = 0.$$

4.38 Esercizio

Chiaramente

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$$

e dunque

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1} = \lim_{x\to0^+} 0\cdot\sqrt{x+1} = 0$$

ma la deduzione

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{0+x}{x} = 1$$

è sbagliata. Dire perché e calcolare quest'ultimo limite.