11 Integrali definiti

11.1 Area dell'ellisse

Calcolare l'area dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

11.1.1 Risoluzione

Ricavando

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

si ha che l'area A dell'ellisse è

$$A = 4 \cdot \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = 4\int_0^{\pi/2} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 y} \cdot a \cos y \mathrm{d}y = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 y \mathrm{d}y =$$

$$= 4ab \left(\frac{y}{2} + \frac{\sin 2y}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 4ab\frac{\pi}{4} = \pi ab$$

11.2 Legge oraria per il moto rettilineo

Consideriamo un punto che si muove su una retta e siano $s(t)$ la posizione occupata dal punto (rispetto all'origine), $v(t)$ la velocità del punto e $a(t)$ l'accelerazione del punto al tempo t. Chiaramente si ha $s'(t) = v(t)$ e $v'(t) = a(t)$, da cui

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t, \quad v(t_2) - v(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\mathrm{d}t$$

La relazione $x = s(t)$ si chiama *legge oraria* del moto.

11.3 Esercizio

Sia $a(t) = te^{-t}$ l'accelerazione al tempo t di un punto che si muove di moto rettilineo e siano $v(0) = 5$ e $s(0) = 3$. Determinare la legge oraria del moto.

11.3.1 Risoluzione

Si ha

$$v(t) - v(0) = \int_0^t \tau e^{-\tau}\mathrm{d}\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^t - \int_0^t (-e^{-\tau})\mathrm{d}\tau = -e^{-\tau}(\tau+1)\Big|_0^t = -e^{-t}(t+1)+1$$

da cui $v(t) = -e^{-t}(t+1) + 6$. Infine

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau = \dots$$

11.4 Baricentro

Dato un segmento $[a, b]$ di massa

$$M = \int_a^b \mathrm{d}M = \int_a^b m(x)\mathrm{d}x$$

(ove $m(x)$ si chiama *densità di massa*), il suo *baricentro* è il punto

$$B = \frac{\int_a^b x\mathrm{d}M}{M} = \frac{\int_a^b xm(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b m(x)\mathrm{d}x}$$

11.5 Esercizio

Calcolare il baricentro di un segmento $[a, b]$ con densità di massa costante $m(x) = m$.

11.5.1 Risoluzione

Si ha

$$B = \frac{\int_a^b xm\mathrm{d}x}{\int_a^b m\mathrm{d}x} = \frac{\frac{mx^2}{2}\Big|_a^b}{mx|_a^b} = \frac{b+a}{2}$$

11.6 Esercizio

Calcolare

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

ove $T_n(x)$ è il polinomio di Chebyshev di grado n (vedi 1.5).

11.6.1 Risoluzione (traccia)

Eseguire il cambiamento di variabile $\arccos x = y$ e integrare due volte per parti.

11.7 Volume solidi di rotazione

Data $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, consideriamo la regione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dalle rette $x = a$, $x = b$ e $y = 0$. Il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x di tale regione è dato da

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$$

Data $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, consideriamo la regione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dalle rette $x = a$, $x = b$ e $y = 0$. Il volume del solido di rotazione delimitato dalla rotazione attorno all'asse y di tale regione è dato da

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

11.8 Esercizio

Calcolare i volumi degli ellissoidi che si ottengono facendo ruotare l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rispettivamente attorno all'asse x e attorno all'asse y.

11.8.1 Risoluzione

Attorno all'asse x:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

Attorno all'asse y: considerando la funzione $y = b\sqrt{a^2 - x^2}/a$ ristretta al semipiano positivo delle x, la sua inversa è $x = a\sqrt{b^2 - y^2}/b$ e pertanto il volume è

$$V = 2 \cdot \pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)\mathrm{d}y = 2\pi \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^b = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Oppure si usa la formula

$$V = 2\pi \int_a^b x b \sqrt{a^2 - x^2}/a \mathrm{d}x$$

11.9 Esercizio

Calcolare il volume del *toro* ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y del cerchio di raggio r e centro $(R, 0)$.

11.9.1 Risoluzione (traccia)

Si tratta di applicare la formula

$$V = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{1-(x-R)^2}\mathrm{d}x$$

11.10 Esercizio

Calcolare il volume della "clessidra" delimitata dalla rotazione attorno all'asse y del grafico di $\arccos x$.

11.10.1 Risoluzione (traccia)

Si tratta di applicare la formula

$$V = 2\pi \int_{0}^{1} x \arccos x\mathrm{d}x$$