Esercitazioni di Analisi Matematica I

Dott. Marco Caliari

a.a. 2005–2006

Queste sono le esercitazioni del corso di Analisi Matematica I per i Corsi di Laurea in Informatica Multimediale/Matematica Applicata presso l'Università degli Studi di Verona nell'anno accademico 2005–2006.

Molto probabilmente contengono sviste e/o errori.

Indice

1 Funzioni goniometriche inverse

1.1 Esercizio

Ricordando che $\sin(\pi/2 - y) = \cos(y)$, dato $x \in [-1, 1]$, calcolare

$$\arcsin x + \arccos x$$

1.1.1 Risoluzione

Per l'identità ricordata, si ha

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos(x)) = x$$

e dunque

$$\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x.$$

1.2 Esercizio

Calcolare

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

1.2.1 Risoluzione

Poniamo $y = \arctan x$, da cui $\tan y = x$. Dunque

$$\frac{1}{x} = \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin(\pi/2 - y)}{\cos(\pi/2 - y)} = \tan(\pi/2 - y) = \tan(-\pi/2 - y).$$

Se $x > 0$, allora $y \in (0, \pi/2)$ e $\pi/2 - y \in (0, \pi/2)$: dunque $\arctan(1/x) = \pi/2 - y$, da cui $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$. Se invece $x < 0$, allora $y \in (-\pi/2, 0)$ e $-\pi/2 - y \in (-\pi/2, 0)$: dunque $\arctan(1/x) = -\pi/2 - y$, da cui $\arctan x + \arctan(1/x) = -\pi/2$.

1.3 Esercizio

Quanto vale $\sin(\arccos x)$?

1.3.1 Risoluzione

Poniamo $y = \arccos x$: allora y è un angolo del primo o del secondo quadrante che ha x per coseno. Dunque è un angolo con seno positivo che vale $\sqrt{1 - x^2}$. Quindi $\sin y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$.

1.4 Esercizio

Quanto vale $\cos(\arcsin x)$?

1.4.1 Risoluzione

Analogamente, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

1.5 Esercizio

Posto $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, mostrare che vale la seguente relazione di ricorrenza:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, \ T_1(x) = x$$

e dedurre che $T_n(x)$ è un polinomio di grado n (chiamato *polinomio di Chebyshev di prima specie di grado* n).

1.5.1 Risoluzione

Si ha

$$T_0(x) = \cos(0) = 1, \ T_1(x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Per la relazione di ricorrenza basta applicare le formule di addizione e di sottrazione del coseno a

$$T_{n+1}(x) = \cos(n \arccos x + \arccos x), \ T_{n-1}(x) = \cos(n \arccos x - \arccos x).$$

Poiché $T_0(x)$ e $T_1(x)$ sono polinomi, per la relazione di riccorrenza $T_n(x)$ è un polinomio (di grado n).

1.6 Esercizio

Calcolare $\cos(2 \arccos(1/3))$.

1.6.1 Risoluzione

Facile. Risulta $-7/9$.

2 Estremanti

Nei seguenti esercizi, gli estremi superiori ed inferiori si intendono in $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, se non specificato diversamente.

2.1 Esercizio

Trovare, se esistono, massimo, estremo superiore, minimo ed estremo inferiore dell'insieme $\{1/n,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$.

2.1.1 Risoluzione

Poiché $1/(n+1) < 1/n$, il massimo (e quindi l'estremo superiore) è $1/1 = 1$. Poiché l'estremo inferiore non è negativo (perché?), supponiamo, per assurdo, che sia $\varepsilon > 0$. Allora, basta prendere $n > 1/\varepsilon$ e si ha $1/n < \varepsilon$: assurdo. Dunque l'estremo inferiore è 0. Poiché non esiste n tale che $1/n = 0$, l'insieme non ha minimo.

2.2 Esercizio

Trovare, se esistono, massimo, estremo superiore, minimo ed estremo inferiore dell'insieme $\{1/n - 1/(n+1),\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$.

2.2.1 Risoluzione

$$1/n - 1/(n+1) > 1/(n+1) - 1/(n+2)$$

e dunque il massimo è $1/2$ ($n = 1$) e l'estremo inferiore 0. Se, per assurdo, fosse $\varepsilon > 0$, basta prendere $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$: allora $1/n < \sqrt{\varepsilon}$ e $1/(n+1) < 1/n < \sqrt{\varepsilon}$ e dunque

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Alternativamente, basta prendere $n > 1/\varepsilon$, da cui

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

2.3 Esercizio

Trovare, se esistono, massimo, estremo superiore, minimo ed estremo inferiore dell'insieme $\{1/(n+1) - 1/n,\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 0\}$.

2.3.1 Risoluzione

È l'insieme opposto a quello precedente.

2.4 Esercizio

Trovare, se esistono, massimo, estremo superiore, minimo ed estremo inferiore dell'insieme delle soluzioni $x \in \mathbb{Q}$ di

$$\frac{x^2-5}{1-x^4} \geq 0$$

2.4.1 Risoluzione

Il segno del numeratore è $x^2 - 5 \geq 0$ per $x \leq -\sqrt{5}$ o $x \geq \sqrt{5}$, mentre il segno del denominatore è $1 - x^4 = (1 - x^2)(1 + x^2) > 0$ per $-1 < x < 1$

		$-\sqrt{5}$		-1		1		$\sqrt{5}$	
x^2-5	$+$	$\bullet$	$-$		$-$		$-$	$\bullet$	$+$
$1-x^4$	$-$		$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$		$-$
	$-$	$\bullet$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	$\bullet$	$-$

Dunque l'insieme delle soluzioni è $\{x,\ x \in \mathbb{Q},\ -\sqrt{5} \leq x < -1,\ \text{oppure}\ 1 < x \leq \sqrt{5}\}$. Gli estremi inferiore e superiore sono $-\sqrt{5}$ e $\sqrt{5}$. Mostriamo che l'estremo superiore non può essere $\eta = \eta_1.\eta_2\eta_3\ldots < \sqrt{5}$: se così fosse, per assurdo, considero $\xi = (\eta + \sqrt{5})/2 = \xi_1.\xi_2\xi_3\ldots$. Questo è un numero reale maggiore di η e quindi avrà una cifra (diciamo ξ_i) maggiore della cifra η_i. Allora il numero $\xi_1.\xi_2\ldots\xi_i$ è un numero razionale maggiore di η e minore di $\xi < \sqrt{5}$.

2.5 Esercizio

Trovare, se esistono, i massimi, i minimi, gli estremi superiori e gli estremi inferiori in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ dell'insieme delle soluzioni x appartenenti rispettivamente a $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ di

$$x^2 < 2$$

2.5.1 Risoluzione

In $\mathbb{N}$: 1,0,1,0. In $\mathbb{Z}$: 1,-1,1,-1. In $\mathbb{Q}$: non esiste, non esiste, non esiste, non esiste. In $\mathbb{R}$: non esiste, non esiste, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

2.6 Esercizio

Qual è il più grande numero che dista da 3 meno che da 7?

2.6.1 Risoluzione

5 è l'estremo superiore dei numeri che hanno tale caratteristica.

2.7 Esercizio

Risolvere, il più velocemente possibile, la seguente disequazione:

$$|x-1| > |x-3|$$

2.7.1 Risoluzione

Si tratta di trovare i numeri che distano da 1 più che da 3: sono i numeri maggiori di 2. Si può risolvere elevando entrambi i membri al quadrato (sono positivi) o separando i vari casi.

2.8 Esercizio

Trovare, se esistono, massimo, estremo superiore, minimo ed estremo inferiore dell'insieme $[0,1)\cap\mathbb{Q}$.

2.8.1 Risoluzione

non esiste, 1, 0, 0. $\eta < 1$ non può essere estremo superiore: sia $\eta = 0.\eta_1\eta_2\ldots < 1$, e sia η_i la prima cifra minore di 9 (se $\eta_i = 9$ per ogni i, allora $\eta = 1$). Allora $\eta < 0.\eta_1\eta_2\ldots\eta_{i-1}(\eta_i+1) < 1$ e appartiene a $[0,1)\cap\mathbb{Q}$.

Il fatto che $x = 0.\overline{9} = 0.99\ldots = 1$ si vede così: $10x = 9.99\ldots$ e $10x - x = 9$ da cui $x = 1$.

2.9 Esercizio

Trovare, se esistono, massimo, estremo superiore, minimo ed estremo inferiore dell'insieme $\{n/\sqrt{n^2+1},\ n\in\mathbb{Z}\}$.

2.9.1 Risoluzione

È facile dimostrare che

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} < \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}}$$

se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ (vale la disuguaglianza inversa per il quadrato degli inversi). Poi chiaramente

$$\left|\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right| < 1$$

Supponiamo, per assurdo, che l'estremo superiore sia minore di 1, cioè $1/\sqrt{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Allora basta prendere $n > 1/\sqrt{\varepsilon}$ e si ha $n/\sqrt{n^2+1} > 1/\sqrt{1+\varepsilon}$: assurdo. Dunque l'estremo superiore è 1 e l'estremo inferiore, con un ragionamento analogo, è -1.

2.10 Esercizio

Dimostrare che gli insiemi $\{n/\sqrt{n^2+1},\ n = 2m,\ m \in \mathbb{Z}\}$ e $\{n/\sqrt{n^2+1},\ n = 2m+1,\ m \in \mathbb{Z}\}$ sono disgiunti ed hanno gli stessi estremi superiori ed inferiori.

2.10.1 Risoluzione

Basta osservare che

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} < \frac{n+2}{\sqrt{(n+2)^2+1}}$$

Gli estremi superiori ed inferiori sono rispettivamente 1 e -1.

2.11 Esercizio

Trovare, tra tutti i rettangoli di ugual area k^2, quello di perimetro minimo.

2.11.1 Risoluzione

La soluzione si basa sulla seguente disuguaglianza:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \quad x, y > 0$$

(la media aritmetica non è inferiore alla media geometrica), ove il segno di uguaglianza vale se e solo se $x = y$. Tale disuguaglianza si dimostra facilmente (esercizio) a partire da

$$(x-y)^2 \geq 0$$

Dunque, chiamando x e y i lati di un rettangolo si ha che il perimetro $2p$ è uguale a $2(x+y)$. Ma $2(x+y) \geq 4\sqrt{xy} = 4k$ e vale il segno di uguaglianza se e solo se $x = y = k$. Dunque il rettangolo richiesto è il quadrato di lato k.

2.12 Esercizio

Trovare, tra tutti i triangoli rettangoli con somma dei cateti costante e uguale a $2k$, quello di area massima e quello di area minima.

2.12.1 Risoluzione

Analogamente al precedente, l'area è massima quando $\sqrt{xy}$ è massimo, cioè quando è uguale a $(x+y)/2 = k$, cioè per $x = y = k$. Il triangolo di area minima è quello degenere con $x = 2k$ e $y = 0$.

2.13 Esercizio

Trovare i punti appartenenti alla circonferenza $x^2+y^2 = 1$ con prodotto delle coordinate massimo.

2.13.1 Risoluzione

Basta osservare che $(x-y)^2 \geq 0$ e vale l'uguaglianza se e solo se $x = y$. Dunque $x^2+y^2 \geq 2xy$. Quindi il prodotto delle coordinate non supera $1/2$ ed è massimo per $x = y$. Dunque $x = y = \sqrt{2}/2$ oppure $x = y = -\sqrt{2}/2$.

2.14 Esercizio

Per quale valore di $m \in \mathbb{R}$ il prodotto delle soluzioni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ di

$$(m-1)x^2 + 2(1-m)x + (2-m) = 0, \quad m \neq 1$$

è massimo?

2.14.1 Risoluzione

Dato un polinomio ax^2+bx+c, $a \neq 0$, che ammette due radici reali x_1 e x_2, si ha

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Dunque il prodotto delle radici è c/a mentre la somma è $-b/a$. Nell'equazione di partenza, la somma delle radici vale 2 e quindi il prodotto è massimo quando le radici sono uguali, cioè $x_1 = x_2 = 1$. Poiché il prodotto vale $1 = (2-m)/(m-1)$, si ha $m = 3/2$.

2.15 Esercizio

Per quali valori di $m \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$x^2 - (m^3 + m + 2)x + 1 = 0$$

non ammette due soluzioni entrambe positive?

2.15.1 Risoluzione

Chiaramente non ci sono soluzioni nulle. Se le soluzioni x_1, x_2 fossero entrambe positive, soddisferebbero $(x_1 + x_2) \geq 2\sqrt{x_1 x_2}$, cioè $m^3 + m + 2 \geq 2$. Quindi per $m^3+m+2 < 2$ le soluzioni non possono essere entrambe positive. Quindi, per $m < 0$ non ci sono due soluzioni entrambe positive.

3 Successioni

3.1 Binomio di Newton

Sarà utile, nel seguito, la seguente formula, detta *formula del binomio di Newton,* valida per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

ove

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k-1)}{k!}.$$

3.2 Esercizio

Verificare la formula del binomio di Newton per $n = 1, 2, 3$.

3.3 Disuguaglianza di Bernoulli

Se $x \geq -1$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

3.3.1 Dimostrazione

Ovvio per $x = -1$. Per induzione: per $n = 1$ è ovvia. Supponiamo sia vera per n, vogliamo dimostrare che è vera anche per $n+1$: moltiplichiamo entrambi i membri per $1+x$ (fattore maggiore di 0) ed otteniamo

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + x + nx + nx^2 \\
(1+x)^{n+1} &\geq 1 + (n+1)x + nx^2
\end{aligned}$$

ed essendo $nx^2 \geq 0$ si ha $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$.

3.4 Disugualgianza aritmetico-geometrica

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, allora

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

(la media aritmetica non è inferiore alla media geometrica), ove il segno di uguaglianza vale se e solo se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

3.5 Esercizio

Dati n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, dire qual è più grande tra

$$2^{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}}$$

e

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} 2^{x_k}}{n}$$

3.6 Sul numero di Nepero

La successione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

è monotona crescente e superiormente limitata (quindi ha limite finito). Per dimostrare che

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

si noti che, presi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1 + 1/n$ e $x_{n+1} = 1$, si ha, per la disuguaglianza aritmetico-geometrica,

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n(1+1/n)+1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} > \sqrt[n+1]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n+1}} = \\ = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

mentre se $x_1 = x_2 = \ldots = x_{n+1} = 1 + 1/(n+1)$ si ha

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)(1+1/(n+1))}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}$$

Per dimostrare la limitatezza, occorre prima dimostrare che

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

è una successione monotona decrescente (sempre usando la disuguaglianza aritmetico-geometrica, esercizio). Poi si osserva che

$$0 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1, \quad n > 1$$

e dunque

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}, \quad n > 1.$$

Per $n > 2$ si ha $(1 + 1/n)^n > 2$ e per $n = 6$ si ha $(1 - 1/n)^{-n} < 3$, dunque

$$2 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3, \quad n > 2.$$

3.7 Esercizio

Completare la risoluzione dell'esercizio 3.6.

3.8 Esercizio

Qual è più grande tra n^{n+1} e $(n + 1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$?

3.8.1 Risoluzione

Si ha

$$\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n}$$

che è minore di 1 per $n > 2$. Dunque $n^{n+1} > (n + 1)^n$ per $n > 2$.

3.9 Esercizio

Dimostrare, per induzione, che se $|x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, allora

$$|x^n| \leq 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

3.9.1 Risoluzione

Per $n = 1$ è ovvio. Se $|x^n| \leq 1$, allora $|x^{n+1}| = |x^n \cdot x| = |x^n|\,|x| \leq 1$.

3.10 Esercizio

Dimostrare che, se $0 \leq x < 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

3.10.1 Risoluzione

Per $x = 0$ è ovvio. La successione è monotona decrescente e limitata. Dunque converge all'estremo inferiore. Se, per assurdo, il limite fosse $\varepsilon > 0$, basta prendere $n > \log_x \varepsilon$, da cui $\log_x x^n > \log_x \varepsilon$ e quindi $x^n < \varepsilon$: assurdo.

3.11 Esercizio

Dimostrare che, se $|x| < 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$$

3.11.1 Risoluzione

$$\lim_{n\to+\infty} |x^n| = \lim_{n\to+\infty} |x|^n = 0$$

e dunque

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0.$$

3.12 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

3.12.1 Risoluzione

Se, per assurdo, il limite fosse $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, basta prendere $n > M^2$, e risulta $\sqrt{n} > M$: assurdo.

3.13 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

al variare di $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$.

3.13.1 Risoluzione

Se, per assurdo, il limite fosse $\varepsilon > 0$, basta prendere $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$ e risulta $1/n^p < \varepsilon$: assurdo.

3.14 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

3.14.1 Risoluzione

Poniamo $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Allora $x_n \geq 0$ (perché?) e si ha

$$n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

L'ultimo termine è il termine corrispondente a $k = 2$ nella sommatoria della formula del binomio di Newton 3.1 per $(1 + x_n)^n$. Essendo x_n non negativo, ogni elemento della sommatoria è non negativo e dunque il binomio $(1+x_n)^n$ è maggiore o uguale ad ogni addendo della sommatoria. Dalla disequazione scritta si ricava

$$0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

Per il teorema dei due carabinieri, $x_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

3.15 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1, \quad p > 0$$

3.15.1 Risoluzione

Se $p \geq 1$, esiste $n \in \mathbb{N}$, $n > p$ e dunque

$$1 \leq \sqrt[n]{p} \leq \sqrt[n]{n}$$

e si conclude per il teorema dei due carabinieri. Se $0 < p < 1$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{p}}} = 1.$$

3.16 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha + 1}{n^2 + 1}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.

3.16.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha+1}{n^2+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n^2}$$

che vale $+\infty$ se $\alpha>2$, 1 se $\alpha=2$ e 0 se $\alpha<2$.

3.17 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$$

3.17.1 Risoluzione

Occorre *razionalizzare*:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)&=\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\\&=\lim_{n\to+\infty} n\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1\end{aligned}$$

3.18 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+7^n}$$

3.18.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3^n+7^n}=\lim_{n\to+\infty}7\sqrt[n]{\left(\frac{3}{7}\right)^n+1}=7$$

3.19 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3^n + (1-(-1)^n)7^n}$$

3.20 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(1-\cos(\pi n))3^n + 7^n}$$

3.21 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

3.21.1 Risoluzione

Basta dimostrare che $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$. Supponiamo n pari, $n = 2m$: occorre dimostrare che $n! \geq n^{n/2} = n^m$. Osserviamo che

$$n! = \underbrace{[n\cdot 1]\cdot[(n-1)\cdot 2]\cdot \ldots \cdot [(m+1)\cdot m]}_{m \text{ termini}}$$

$$n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{m \text{ termini}}$$

Dunque basta dimostrare che $(n-k)\cdot(1+k) \geq n$, $k = 0, \ldots, m-1$ (semplice esercizio).

Supponiamo ora n dispari, $n = 2m+1$: occorre dimostrare che $n! \geq \sqrt{n}\cdot n^m$. Procedendo in modo analogo, rimane da dimostrare che $m+1 \geq \sqrt{2m+1}$ (semplice esercizio).

3.22 Esercizio

Completare la risoluzione dell'esercizio 3.21.

3.23 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

3.23.1 Risoluzione

Si ha, per $n > 1$,

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1$$

la prima disuguaglianza per la disuguaglianza di Bernoulli 3.3, la seconda ovvia. E dunque, per il teorema dei due carabinieri, il limite vale 1.

3.24 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

3.24.1 Risoluzione

Dall'esercizio 3.6, sappiamo che tale limite esiste finito (perché?). Basta calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^n$$

3.25 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

3.25.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{-m}\right)^{-m} = \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{m}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e.$$

3.26 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

3.26.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+2)-1}{n+2}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n}{n+2}}$$

da cui si ottiene che il limite cercato vale e^{-1}.

3.27 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}$$

3.27.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left[n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]}{\log n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\log n+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log n} = 1$$

3.28 Esercizio

Determinare, se esiste, il valore del limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{\sqrt{\ln^2 n+\ln n^2}}}{n^2+1}$$

al variare di $a\in\mathbb{R}$, $a\geq 0$

3.28.1 Risoluzione

Per $0\leq a\leq 1$ è facile. Altrimenti,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^{\sqrt{\ln^2 n+\ln n^2}}}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a^{\ln n\cdot\sqrt{1+1/(2\ln n)}}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\ln n\cdot\sqrt{1+1/(2\ln n)}\cdot\ln a}}{n^2} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n^{\sqrt{1+1/(2\ln n)}\cdot\ln a-2}$$

e dunque il valore del limite è 0 se $\ln a<2$ e $+\infty$ se $\ln a>2$. Se $\ln a=2$ (cioè $a=e^2$), si tratta di determinare il valore di

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\left(2\sqrt{1+\frac{1}{2\ln n}}-2\right)\ln n}$$

Razionalizzando l'esponente, si trova che il limite vale $\sqrt{e}$.

4 Limiti

4.1 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n}, \quad a > 1$$

4.1.1 Risoluzione

Poniamo $x = \sqrt{a} - 1$. Per la disuguaglianza di Bernoulli 3.3,

$$\left(\sqrt{a}\right)^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx$$

e dunque

$$\frac{a^n}{n} > \frac{n^2 x^2}{n} = nx^2$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

4.2 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty, \quad a > 1$$

seguendo la dimostrazione dell'Esercizio 3.14.

4.3 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty, \quad a > 1$$

4.3.1 Risoluzione

Dato $x > 1$, definiamo *parte intera* di x (e la indichiamo con $[x]$ oppure $\lfloor x \rfloor$) il numero intero più vicino a x e tale che $[x] \leq x$. Allora si ha

$$1 \leq \frac{x}{[x]} < 2, \quad 0 \leq x - [x] \leq 1$$

e inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{[x]}}{[x]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Consideriamo adesso la funzione

$$f(x) = \frac{\dfrac{a^x}{x}}{\dfrac{a^{[x]}}{[x]}} = \frac{a^x}{a^{[x]}}\frac{[x]}{x} = a^{x-[x]}\frac{[x]}{x}.$$

Per le disuguaglianze viste, si ha

$$1 \cdot \frac{1}{2} < f(x) \leq a \cdot 1.$$

Dunque,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$$

altrimenti, per $x > M$, si avrebbe $f(x) < 1/2$.

4.4 Esercizio

Calcolare, se esistono, i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \sin(n\pi)$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \sin(x\pi)$$

4.4.1 Risoluzione

La successione $\{\sin(n\pi)\}_n$ è una successione che vale costantemente 0 e dunque il suo limite è 0. Il secondo limite invece non esiste, poiché preso comunque M, esiste $x > M$ con $|\sin(x\pi) - \ell| \geq 1/2$, qualunque sia $\ell \in \tilde{\mathbb{R}}$.

4.5 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p}, \quad a > 1,\ p \geq 0$$

4.5.1 Risoluzione

Poniamo $y = a^{1/(p+1)} - 1$. Per la disuguaglianza di Bernoulli 3.3,

$$\left(a^{1/(p+1)}\right)^n = (1+y)^n \geq 1 + ny > ny$$

e dunque

$$\frac{a^n}{n^p} > \frac{n^{p+1}y^{p+1}}{n^p} = ny^{p+1}$$

da cui

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^p} = +\infty.$$

4.6 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{qx}}{x^p}, \quad a > 1,\ q > 0,\ p \geq 0$$

4.6.1 Risoluzione

Poniamo $y = qx$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{qx}}{x^p} = \lim_{y\to+\infty} \frac{a^y}{(y/q)^p} = \lim_{y\to+\infty} q^p \frac{a^y}{y^p} = +\infty.$$

4.7 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x}, \quad a > 1$$

4.7.1 Risoluzione

Poniamo $y = \log_a x$. Allora

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y}{a^y} = 0.$$

4.8 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^q}, \quad a > 1,\ q > 0$$

4.8.1 Risoluzione

Poniamo $y = \log_a x$. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^q} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{a^{qy}} = 0.$$

4.9 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^p}{x^q}, \quad a > 1,\ p \geq 0,\ q > 0$$

4.9.1 Risoluzione

Poniamo $y = \log_a x$. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^p}{x^q} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^p}{a^{qy}} = 0.$$

4.10 Limiti particolari

Si possono dimostrare i seguenti limiti

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

da cui

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty, \quad a \in \mathbb{R}$$
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

4.11 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n - n^2}{n^6 - n!}$$

4.11.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - n^2}{n^6 - n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n \left(1 - \frac{n^2}{e^n}\right)}{n! \left(\frac{n^6}{n!} - 1\right)} = 0.$$

4.12 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \log_2 3^n - \log_2 n^{79/2}$$

4.12.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \log_2 3^n - \log_2 n^{79/2} = \lim_{n\to+\infty} \log_2 \frac{3^n}{n^{79/2}} = +\infty.$$

4.13 Esercizio

Dimostrare che

$$\lim_{x\to 0^+} x \log_a x = 0, \quad a > 1$$

4.13.1 Risoluzione

Poniamo $y = -\log_a x$. Allora

$$\lim_{x\to 0^+} x \log_a x = \lim_{y\to+\infty} a^{-y} \cdot (-y) = 0.$$

4.14 Esercizio

Data $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin\left(x^{-c}\right)}{x^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c > 0$, dimostrare che il limite

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

vale 0 per $\alpha < 0$ e non esiste per $\alpha \geq 0$.

4.14.1 Risoluzione

Se $\alpha < 0$ si ha

$$0 \leq \left|x^{-\alpha}\right| \cdot \left|\sin(x^{-c})\right| \leq \left|x^{-\alpha}\right| \cdot 1$$

e si conclude per il teorema dei due carabinieri. Se invece $\alpha \geq 0$, considerando le successioni $\{x_n\}_n = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^{(1/c)}$ e $\{y_n\}_n = \left(\frac{1}{n\pi+\pi/2}\right)^{(1/c)}$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

ma

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \infty.$$

4.15 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin x},$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$.

4.15.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} n \frac{\sin(nx)}{nx} \frac{x}{\sin x} = n.$$

4.16 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x}$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$.

4.16.1 Risoluzione

Poniamo $y = x - \pi$. Se n è pari, allora

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(ny + n\pi)}{\sin(y+\pi)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(ny)}{-\sin y} = -n.$$

Se n è dispari, allora

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin x} = n$$

(esercizio).

4.17 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$

4.17.1 Risoluzione

Moltiplicando numeratore e denominatore per $1+\cos x$ si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}.$$

4.18 Esercizio (altre forme indeterminate)

Dall'uguaglianza

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$$

si deduca che le seguenti forme di limite

$$\infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty$$

sono indeterminate.

4.18.1 Risoluzione

Nel prodotto $g(x)\log f(x)$ sono indeterminate le forme di limite $0\cdot\infty$ (da cui ∞^0 e 0^0) e $\infty\cdot 0$ (da cui 1^∞).

4.19 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

4.19.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log x} = 1.$$

4.20 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$$

4.20.1 Risoluzione

Si ha
$$\lim_{x\to 0^+} x^{x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x^x \log x} = 0.$$

4.21 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite
$$\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x$$

4.21.1 Risoluzione

Si ha
$$\lim_{x\to 0^+} (x^x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \log x^x} = 1.$$

4.22 Esercizio

Dimostrare che la funzione logaritmo non è una funzione polinomiale.

4.22.1 Risoluzione

Se, per assurdo, fosse una funzione polinomiale, chiamiamo n il suo grado. Poiché $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$ si ha $n > 0$ e poiché $\lim_{x\to+\infty}(\log x)/x = 0$ si ha $n < 1$: assurdo.

4.23 Esercizio

Dimostrare che la funzione logaritmo non è una funzione razionale (cioè rapporto di polinomi).

4.23.1 Risoluzione

Se, per assurdo, fosse una funzione razionale, chiamiamo n ed m rispettivamente il grado del numeratore e del denominatore. Dovrebbe essere contemporaneamente $n > m$ e $n < m + 1$: assurdo.

4.24 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x)$$

4.24.1 Risoluzione

Poniamo $y = -x$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x) = \lim_{y\to 0^-} (y\log(-y))\left(\frac{\log(1+y)}{y}\right) = 0.$$

4.25 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}$$

4.25.1 Risoluzione

Raccogliere $\sqrt{x}$ al numeratore e $\sqrt[4]{x}$ al denominatore. Risulta $+\infty$.

4.26 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}$$

4.26.1 Risoluzione

Raccogliere $\sqrt[3]{x}$ al numeratore e $\sqrt[5]{x}$ al denominatore. Risulta 0.

4.27 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$$

4.27.1 Risoluzione

Non esiste, in quanto il limite destro e il limite sinistro sono differenti.

4.28 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{e^{x^2}-1})}{\sqrt{1-\cos x}}$$

4.28.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{e^{x^2}-1})}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{e^{x^2}-1})}{x\sin x\sqrt{e^{x^2}-1}} x\sqrt{1+\cos x}\sqrt{e^{x^2}-1} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}\sqrt{e^{x^2}-1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\cos x}\sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}} = \sqrt{2}.$$

4.29 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

4.29.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}.$$

4.30 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}, \quad n,m \in \mathbb{N},\ n,m>0,\ n\neq m$$

4.31 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} x^{x/(1-x)}$$

4.32 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$$

4.32.1 Risoluzione

Poniamo $y = x - 1$. Si ha

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{y \to 0} \frac{\log(y+1)}{y} = 1.$$

4.33 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$$

4.33.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x \log x} - 1}{x \log x} \log x = -\infty.$$

4.34 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}$$

4.35 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

4.35.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1.$$

4.36 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2 + \sin \frac{1}{x}}{x}$$

4.36.1 Risoluzione

Si ha

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2 + \sin \frac{1}{x}}{x} \leq \frac{3}{x}$$

e si conclude, per il teorema dei due carabinieri, che il limite vale $+\infty$.

4.37 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x}, \quad 0 < a < 1$$

4.37.1 Risoluzione

Poniamo $y = \log_a x$. Si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{y \to -\infty} \frac{y}{a^y} = \lim_{y \to -\infty} \frac{y}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-y}} = 0.$$

4.38 Esercizio

Chiaramente

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

e dunque

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1} = \lim_{x \to 0^+} 0 \cdot \sqrt{x+1} = 0$$

ma la deduzione

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} + x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0 + x}{x} = 1$$

è sbagliata. Dire perché e calcolare quest'ultimo limite.

5 Ancora limiti

5.1 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x)$$

5.1.1 Risoluzione

Poniamo $y = -x$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \log x \log(1-x) = \lim_{y\to 0^-} (y \log(-y)) \left(\frac{\log(1+y)}{y} \right) = 0.$$

5.2 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{x}}$$

5.2.1 Risoluzione

Raccogliere $\sqrt{x}$ al numeratore e $\sqrt[4]{x}$ al denominatore. Risulta $+\infty$.

5.3 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[5]{x}}$$

5.3.1 Risoluzione

Raccogliere $\sqrt[3]{x}$ al numeratore e $\sqrt[5]{x}$ al denominatore. Risulta 0.

5.4 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$$

5.4.1 Risoluzione

Non esiste, in quanto il limite destro e il limite sinistro sono differenti.

5.5 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{e^{x^2}-1})}{\sqrt{1-\cos x}}$$

5.5.1 Risoluzione

Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{e^{x^2}-1})}{\sqrt{1-\cos x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{e^{x^2}-1})}{x\sin x\sqrt{e^{x^2}-1}} x\sqrt{1+\cos x}\sqrt{e^{x^2}-1} = \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\cos x}\sqrt{e^{x^2}-1}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{1+\cos x}\sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}} = \sqrt{2}.\end{aligned}$$

5.6 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$$

5.6.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{3}{2}.$$

5.7 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}, \quad n, m \in \mathbb{N},\ n, m > 0,\ n \neq m$$

5.7.1 Risoluzione

Poniamo $y = \sqrt[n\cdot m]{x}$. Allora si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1} = \lim_{y\to 1} \frac{y^m-1}{y^n-1} = \lim_{y\to 1} \frac{(y-1)(y^{m-1}+y^{m-2}+\ldots+y+1)}{(y-1)(y^{n-1}+y^{n-2}+\ldots+y+1)} = \frac{m}{n}.$$

5.8 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} x^{x/(1-x)}$$

5.8.1 Risoluzione

Poniamo $y = x - 1$. Si ha

$$\lim_{x\to 1} x^{x/(1-x)} = \lim_{x\to 1} e^{\frac{x}{1-x}\log x} = \lim_{y\to 0} e^{-(1+y)\frac{\log(1+y)}{y}} = \frac{1}{e}.$$

5.9 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}$$

5.9.1 Risoluzione

Poniamo $y = x - 1$. Si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = \lim_{y\to 0} \frac{\log(y+1)}{y} = 1.$$

5.10 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x}$$

5.10.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x\log x} - 1}{x\log x} \log x = -\infty.$$

5.11 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

5.11.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3-3-1}{x+3}\right)^{x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+3}\right)^{\frac{x+2}{x+3}} = e^{-4}.$$

5.12 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

5.12.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1.$$

5.13 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2+\sin\frac{1}{x}}{x}$$

5.13.1 Risoluzione

Si ha

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2+\sin\frac{1}{x}}{x} \leq \frac{3}{x}$$

e si conclude, per il teorema dei due carabinieri, che il limite vale $+\infty$.

5.14 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}, \quad 0<a<1$$

5.14.1 Risoluzione

Poniamo $y = \log_a x$. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = \lim_{y\to-\infty} \frac{y}{a^y} = \lim_{y\to-\infty} \frac{y}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-y}} = 0.$$

5.15 Esercizio

Chiaramente

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x} = 0$$

e dunque

$$\lim_{x\to0^+} \sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1} = \lim_{x\to0^+} 0\cdot\sqrt{x+1} = 0$$

ma la deduzione

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{0+x}{x} = 1$$

è sbagliata. Dire perché e calcolare quest'ultimo limite.

5.15.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}+x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}(1+\sqrt{x}) = \lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}(1+\sqrt{x}) = +\infty.$$

6 Serie

6.1 Esercizio

Calcolare, se esiste,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$$

6.1.1 Risoluzione

Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 9 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n - 1 \right) = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 1.$$

Per inciso,

$$0.\overline{9} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 1$$

6.2 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - 1/2}$$

è convergente.

6.2.1 Risoluzione

Si ha

$$\frac{1}{n - 1/2} > \frac{1}{n}$$

e dunque la serie è maggiorante della serie armonica e quindi diverge.

6.3 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 100}$$

è convergente.

6.3.1 Risoluzione

Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+100} = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n}$$

e il termine a destra diverge.

6.4 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

è convergente.

6.4.1 Risoluzione

Si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1/2} > \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \right)$$

e dunque diverge.

6.5 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

è convergente.

6.5.1 Risoluzione

Il termine generale è infinitesimo (esercizio), ma la serie non converge. La ridotta m-esima è $s_m = \sqrt{m+1} - 1$.

6.6 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n}{n^2}$$

è convergente.

6.6.1 Risoluzione

Si ha

$$0 \leq \frac{1 - \cos n}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

e dunque la serie converge.

6.7 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

converge.

6.7.1 Risoluzione

Usando il criterio di asintoticità, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \cos(1/n)}{1/n^2} = \frac{1}{2}$$

(vedi Esercizio 4.17) e dunque la serie (a termini non negativi) converge perché converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

6.8 Esercizio

Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

è convergente.

6.8.1 Risoluzione

Usando il criterio della radice si vede subito la convergenza.

6.9 Esercizio

Dimostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n}$$

converge.

6.9.1 Risoluzione

Per poter uare il criterio di Leibniz, basta verificare la descrescenza del modulo del termine generale. Si ha

$$\frac{\log(n+1)}{n+1} < \frac{\log n}{n} \Leftrightarrow n\log(n{+}1) < (n{+}1)\log n \Leftrightarrow \log(n{+}1)^n < \log n^{n+1} \Leftrightarrow (n{+}1)^n < n^{n+1}$$

che è vero per $n > 2$ (vedi Esercizio 3.8).

6.10 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.10.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$$

per qualunque $x \in \mathbb{R}$. Dunque la serie converge per qualunque $x \in \mathbb{R}$. Si ha inoltre

$$\exp(x) = e^x = \lim_{y\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{y}\right)^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} .$$

6.11 Esercizio

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{n\to+\infty} n \sin(2\pi \cdot e \cdot n!)$$

6.11.1 Risoluzione (traccia)

Si usi il fatto che

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} .$$

6.12 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.12.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti, si ha

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{n+1}}{n+1}\frac{n}{|x|^n}=\lim_{n\to+\infty}|x|\frac{n}{n+1}=|x|\,.$$

Dunque per $|x|<1$ la serie converge assolutamente. Per $x<-1$ la serie diverge (a $-\infty$). Per $x>1$ la serie non converge, perché il termine generale non è infinitesimo (e di segno alterno). Per $x=1$, la serie diventa la serie armonica a termini di segno alterno (e dunque converge) e per $x=-1$ la serie diventa l'opposto della serie armonica (e dunque diverge a $-\infty$). Inoltre, per $-1<x\leq 1$ si ha

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

(in particolare, la serie armonica a termini di segno alterno converge a $\log 2$).

6.13 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.13.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti è facile vedere che la serie converge assolutamente per $|x|<1$. Poi se $|x|>1$, la serie non converge (il termine generale non è infinitesimo e di segno alterno). Se $|x|=1$ la serie converge per il criterio di Leibniz. Inoltre, per $|x|\leq 1$, si ha

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

e, in particolare,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

6.14 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.14.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti, si ha

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!\,|x|^n} = |x| \frac{(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n} \frac{n^n}{n!} = |x| \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{e}$$

e quindi la serie è assolutamente convergente se $|x| < e$. Se $x > e$ la serie diverge (perché il termine generale, positivo, non è infinitesimo) mentre se $x < -e$ non converge (perché il termine generale non è infinitesimo e di segno alterno). Se $|x| = e$, si ha $|a_{n+1}| > |a_n|$ (perché?) e dunque il termine generale non è infinitesimo e quindi la serie diverge se $x = e$ e non converge se $x = -e$.

6.15 Esercizio

Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n\to+\infty} n! \left(\frac{3}{n}\right)^n$$

6.15.1 Risoluzione

Poniamo $x_n = n! \left(\frac{3}{n}\right)^n$: per quanto visto nell'Esercizio 6.14, si ha $x_{n+1} > x_n$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \geq q > 1$$

dunque il limite vale $+\infty$.

6.16 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 x}{n+x^2}}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.16.1 Risoluzione

Usando il criterio della radice per la serie dei valori assoluti si ha

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{e^{-\frac{n^2 x}{n+x^2}}} = \left(e^{-\frac{n^2 x}{n+x^2}}\right)^{1/n} = e^{-\frac{nx}{n+x^2}}.$$

Dunque

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = e^{-x}$$

e quindi la serie è assolutamente convergente per $x > 0$ e divergente (perché a termini positivi) per $x < 0$. Per $x = 0$, diverge.

6.17 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.17.1 Risoluzione

Usando il criterio della radice per la serie dei valori assoluti si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n |x|^n} = \lim_{n\to+\infty} n |x| = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e dunque se $x = 0$ la serie converge assolutamente, altrimenti diverge se $x > 0$ e non converge se $x < 0$.

6.18 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x+2)^n \frac{n+1}{n^2+1}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.18.1 Risoluzione

Usando il criterio del rapporto per la serie dei valori assoluti, è facile vedere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x+2| \, .$$

Dunque, la serie converge assolutamente per $|x+2|<1$, diverge per $x+2>1$ e non converge per $x+2<-1$. Se $x+2=1$, la serie diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}$$

e il suo termine generale è dello stesso ordine di $1/n$ per $n \to +\infty$ (esercizio) e dunque diverge. Se invece $x+2=-1$, basta osservare che il termine generale è infinitesimo e che il suo valore assoluto è decrescente (basta osservare che il rapporto tra un termine e il successivo è maggiore di 1): dunque la serie converge per il criterio di Leibniz.

6.19 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{4^{n+1}e^n}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

6.20 Esercizio

Descrivere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{3}{2}}\right)(2x+11)^{2n+1}}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

7 Continuità

7.1 Definizione

La domanda "la funzione $f(x)$ è continua?" significa "la funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$, ove D è il suo dominio di definizione, è continua?".

7.2 Esercizio

La funzione $f(x) = 1/x$ è continua?

7.2.1 Risoluzione

Sì, perché è continua nel suo dominio di definizione $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7.3 Esercizio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua?

7.3.1 Risoluzione

No, perché

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty \neq f(0) = 0.$$

7.4 Esercizio

Supponiamo che f sia una funzione reale definita su $\mathbb{R}$ che soddisfi

$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$. Questo implica che f è continua?

7.4.1 Risoluzione

No, basta considerare

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

7.5 Esercizio

La funzione continua $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin(1/x)$ può essere estesa ad una funzione continua su $\mathbb{R}$ (esiste cioè $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua che, ristretta a $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, coincide con f)?

7.5.1 Risoluzione

No, perché non esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$.

7.6 Esercizio

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(1/x)}{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua?

7.6.1 Risoluzione

Sì, perché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0).$$

7.7 Esercizio

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

è continua?

7.7.1 Risoluzione

Poiché

$$\lim_{x\to 0} f(x) = a$$

(esercizio), la funzione è continua per $a = 2$.

7.8 Esercizio

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sin x)}{x} & x \neq 0 \\ a^2 - 1 & x = 0 \end{cases}$$

è continua?

7.8.1 Risoluzione

Poiché

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x} \frac{\sin x}{x} = 1$$

la funzione è continua per $a^2 - 1 = 1$, cioè $a = \pm\sqrt{2}$.

7.9 Esercizio

Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x} & x < 0 \\ x - a^2 + 2a & x \geq 0 \end{cases}$$

è continua?

7.9.1 Risoluzione

La funzione vale $-a^2 + 2a$ in 0 e tale è il limite destro verso 0. Il limite sinistro è

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1 + 1 - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x - 1}{2x} + \frac{e^{-x} - 1}{2(-x)} = 1.$$

Dunque la funzione è continua per $-a^2 + 2a = 1$, cioè $a = 1$.

7.10 Funzioni iperboliche

La funzione

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

si chiama *seno iperbolico*. La funzione

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

si chiama *coseno iperbolico*.

1. Mostrare che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
2. calcolare la funzione inversa di $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
3. calcolare la funzione inversa di $\cosh\colon [0, +\infty) \to [1, +\infty)$;
4. calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh x}{x^2}$$

7.10.1 Risoluzione

1. Facile;
2. poniamo
$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
Allora
$$e^x - \frac{1}{e^x} - 2y = 0$$
da cui
$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$
e quindi
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$
da cui
$$x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$$
3. analogamente,
$$x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$$
4. Facili.

7.11 Esercizio

Risolvere l'equazione
$$\sinh x + \cosh x = 1$$

7.11.1 Risoluzione

Con il cambio di variabile $X = \cosh x$, $Y = \sinh x$, si ha
$$\begin{cases} Y + X = 1 \\ X^2 - Y^2 = 1 \end{cases}$$
la cui soluzione è $X = 1$, $Y = 0$, cioè $x = 0$.

7.12 Esercizio

Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ continua e sia $f(0) = 2$. Quanto vale $f(\sqrt{3})$?

7.12.1 Risoluzione

Vale 2. Infatti f deve essere la funzione costante $f(x) = 2$. Se così non fosse, supponiamo, per assurdo, $f(a) \neq f(b)$, con $a \neq b$. Allora dovrebbe essere $f([a, b]) \supseteq [f(a), f(b)]$ ma $f([a, b]) \subset \mathbb{N}$ per ipotesi, mentre $[f(a), f(b)]$ è un intervallo reale.

7.13 Esercizio

Dimostrare che l'equazione

$$2x^3 + 3x - 3 = 0$$

ha una ed una sola soluzione reale.

7.13.1 Risoluzione

La funzione $f(x) = 2x^3 + 3x - 3$ è continua e vale -3 in 0 e 2 in 1. Dunque ha sicuramente uno zero in $[0, 1]$. Poi, per $x < 0$, è negativa (e dunque non può avere altri zeri) e per $x > 0$ è chiaramente crescente. Dunque ha un solo zero in $[0, 1]$.

8 Derivate

8.1 Esercizio

Calcolare la derivata di
$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

8.1.1 Risoluzione

Si ha
$$f(x) = e^{x \log(1+1/x)}$$
e dunque
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x \log(1+1/x)} \cdot \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}\right) \end{aligned}$$

8.2 Esercizio

Calcolare la derivata di
$$f(x) = |x|$$

8.2.1 Risoluzione

Si ha $f(x) = x$ per $x \geq 0$ e $f(x) = -x$ per $x < 0$ e dunque
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ \text{non esiste} & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{sgn} x & x \neq 0 \\ \text{non esiste} & x = 0 \end{cases}$$

8.3 Esercizio

Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cosa si può dire di $\mathrm{D}\,|f(x)|$?

8.3.1 Risoluzione

L'idea è che la derivata vale $\operatorname{sgn} f(x) \cdot f'(x)$. In realtà, occorre considerare separatamente in punti in cui $f(x) = 0$. Dunque si ha
$$\mathrm{D}\,|f(x)| = \begin{cases} \operatorname{sgn} f(x) \cdot f'(x) & f(x) \neq 0 \\ 0 & f(x) = 0 \text{ e } f'(x) = 0 \\ \text{non esiste} & f(x) = 0 \text{ e } f'(x) \neq 0 \end{cases}$$

8.4 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \ a \neq 1$$

8.4.1 Risoluzione

Si ha

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

e dunque

$$f'(x) = \frac{1}{x \log a}$$

8.5 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \log |x|$$

8.5.1 Risoluzione

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

8.6 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \log(ax), \quad a > 0$$

8.6.1 Risoluzione

Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

8.7 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$$

dire per quali punti $x \in \mathbb{R}$ è derivabile.

8.7.1 Risoluzione

La funzione ha per dominio $\mathbb{R}$. La derivata è

$$f'(x) = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

che non esiste per $x = \pm 1$.

8.8 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\cos x - 1}$$

dire per quali punti $x \in \mathbb{R}$ è derivabile.

8.9 Esercizio

Data la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

dire per quali punti $x \in \mathbb{R}$ è derivabile.

8.9.1 Risoluzione

La funzione ha per dominio $\mathbb{R}$ (perchè?). La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{\sqrt{2x^2+x^4}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2+x^2} \cdot (1+x^2)}$$

La derivata è definita per $x \neq 0$. Per $x = 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \sqrt{2}, \quad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\sqrt{2}$$

e dunque la derivata destra e la derivata sinistra esistono ma sono diverse, quindi la funzione non è derivabile in $x = 0$.

8.10 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

8.10.1 Risoluzione

È facile verificare che $f(x)$ è una funzione continua (vedi Esercizio 7.6) e che $g(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ coincide con $f'(x)$ per $x \neq 0$. Per $x = 0$, si può considerare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)\sin\frac{1}{0+h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$

che non esiste. Dunque $f(x)$ è derivabile per $x \neq 0$ e la sua derivata vale $g(x)$ (in particolare, $f'(x)$ è una funzione continua).

Osservando che $g(x)$ non è definita in $x = 0$ e che

$$\lim_{x\to 0} g(x)$$

non esiste, si poteva concludere che $f'(x)$ non esiste per $x = 0$? No, vedi l'Esercizio 8.11.

8.11 Esercizio

Calcolare la derivata di

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

8.11.1 Risoluzione

È facile verificare che $f(x)$ è una funzione continua e che $g(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ (funzione non definita in $x = 0$ e che non ammette limite in $x = 0$) coincide con $f'(x)$ per $x \neq 0$. Per $x = 0$, si può considerare il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{(0+h)^2\sin\frac{1}{0+h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h} = 0$$

e dunque

$$f'(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Si noti che la derivata di $f(x)$ non è una funzione continua.

8.12 Esercizio

Discutere continuità, derivabilità e continuità della derivata per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

con α parametro reale non negativo.

8.13 Esercizio

Dimostrare che se

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$$

allora $f'(x_0) = \ell$.

8.13.1 Risoluzione

Dal teorema del valor medio

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) \; .$$

con ξ compreso tra x e x_0. Si conclude passando al limite per $x \to x_0$.

Da quanto visto nei tre esercizi precedenti, non è vero che se non esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} f'(x)$$

allora non esiste $f'(x_0)$.

8.14 Esercizio

Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

è costante a tratti (vedi Esercizio 1.2)

8.14.1 Risoluzione

La funzione ha per dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e la derivata vale 0 in tutto il dominio. Dunque la funzione è costante in $\{x : x < 0\}$ e vale $f(-1) = -\pi/2$ e in $\{x : x > 0\}$ e vale $f(1) = \pi/2$.

8.15 Esercizio

Data la serie dipendente da $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

1. dimostrare che converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$;

2. dimostrare che coincide con la funzione

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

3. supponendo di sapere che la derivata di $\varphi(x)$ coincide con la derivata della serie (fatta termine a termine), dimostrare che la derivata della serie converge assolutamente per ogni x e che

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

8.15.1 Risoluzione

1. Facile (vedi Esercizio 6.10);

2. banale se $x = 0$, altrimenti basta osservare che

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = e^x - 1 \ ;$$

3. facile;

8.16 Esercizio

Calcolare, se esistono, le seguenti derivate:

- $D\left(\log(\log(\log x))\right)$
- $D\left(\log(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}})\right)$
- $D(x^n e^{\sin x})$, $n \in \mathbb{N}$

- $D\left(\sqrt{x}^{\sqrt{x}}\right)$
- $D\left(e^{x^x}\right)$
- $D\left(x^{\log x}\right)$
- $D\left(\sin(x^{\log x})\right)$
- $D\left((\sin x)^{\cos x}\right)$

9 Teoremi del calcolo differenziale

9.1 Esercizio

Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}$$
e tracciarne un grafico approssimativo.

9.1.1 Risoluzione

L'insieme di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{-\pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ La funzione è periodica di periodo 2π: basta studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi)$.

La funzione interseca l'asse $x = 0$ in $(0, 0)$ e l'asse $y = 0$ in $\{(k\pi/2, 0),\ k = 0, 1, 2\}$

Il numeratore è non negativo per $2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi$, dunque per $k\pi \leq x \leq \pi/2 + k\pi$, mentre il denominatore è sempre positivo (nell'insieme di definizione). Dunque $f(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq \pi/2$ e $\pi \leq x < 3\pi/2$

La derivata prima è
$$f'(x) = \frac{2(1 - \sin^2 x - \sin x)}{1 + \sin x}$$
ed è definita in tutto l'insieme di definizione. Essa si annulla per $\sin x = (\pm\sqrt{5} - 1)/2$. Posto $\xi = \arcsin\big((\sqrt{5} - 1)/2\big)$ ($\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$), la derivata prima si annulla per $x = \xi$ e $x = \pi - \xi$. Inoltre la derivata prima è non negativa per $(-\sqrt{5} - 1)/2 \leq \sin x \leq (\sqrt{5} - 1)/2$, cioè per $0 \leq x \leq \xi$ o $\pi - \xi \leq x < 2\pi$. Dunque la funzione $f(x)$ è crescente per $0 \leq x \leq \xi$, $\pi - \xi \leq x < 3\pi/2$ e $3\pi/2 < x < 2\pi$. In $x = \xi$ c'è un massimo relativo e in $x = \pi - \xi$ un minimo relativo.

Si ha poi
$$\lim_{x \to 3\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(2y + 3\pi)}{1 + \sin(y + 3\pi/2)} = \lim_{y \to 0} \frac{-\sin(2y)}{1 - \cos y} =$$
$$= \lim_{y \to 0} \frac{-2 \sin y \cos y(1 + \cos y)}{1 - \cos^2 y} = \lim_{y \to 0} \frac{-2 \cos y(1 + \cos y)}{\sin y} = \infty$$
Ciò è sufficiente per ottenere il grafico in Figura 1.

9.2 Esercizio

Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(3 + x)}$$
e tracciarne un grafico approssimativo.

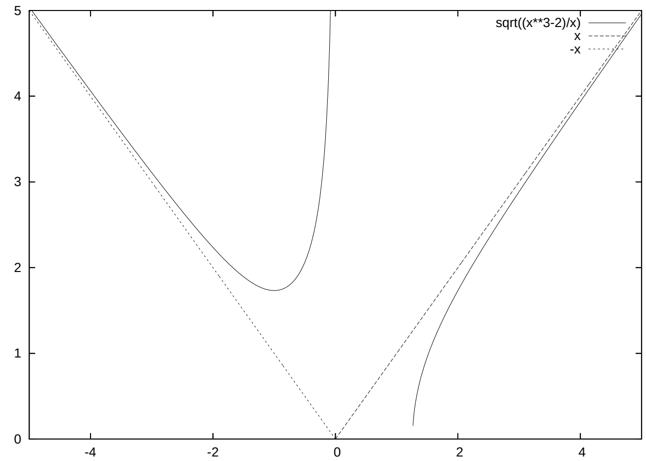


Figura 1: $f(x) = \sin 2x/(1+\sin x)$

9.2.1 Risoluzione

L'insieme di definizione è $\mathbb{R}$.

La funzione interseca l'asse $x = 0$ in $(0,0)$ e l'asse $y = 0$ in $(0,0)$ e $(-3,0)$.

La funzione è non negativa quando $3 + x \geq 0$, cioè $x \geq -3$.

I limiti a $+\infty$ e $-\infty$ valgono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$. Poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(3+x)}}{x} = 1 = m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

esiste un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, ove

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2(3+x)} - x =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{x^2(3+x)} - x) \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x^2(3+x)}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^2(3+x)} + x^2}{\left(\sqrt[3]{x^2(3+x)}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^2(3+x)} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(3+x) - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^2(3+x)}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^2(3+x)} + x^2} = 1$$

La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{x(2+x)}{\left(\sqrt[3]{x^2(3+x)}\right)^2} = \frac{2+x}{\sqrt[3]{x(3+x)^2}}$$

e non è definita per $x = -3$ e $x = 0$, ove si ha

$$\lim_{x\to-3} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$$

Inoltre la derivata prima è nulla per $x = -2$ e non negativa per $2x + x^2 \geq 0$, cioè per $x \leq -2$ ($x \neq -3$) o $x > 0$ e dunque lì la funzione è crescente. In $x = -2$ c'è un massimo relativo, in 0 un minimo relativo.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \left(x(3+x)^2\right)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(2+x)\left(x(3+x)^2\right)^{-\frac{4}{3}}\left((2+x)^2 + x \cdot 2 \cdot (3+x)\right) =$$
$$= -\frac{2}{x(3+x)\sqrt[3]{x(3+x)^2}}$$

ed è non negativa per $3 + x < 0$, cioè $x < -3$. Dunque la funzione $f(x)$ è convessa per $x < -3$.

Ciò è sufficiente per ottenere il grafico in Figura 2.

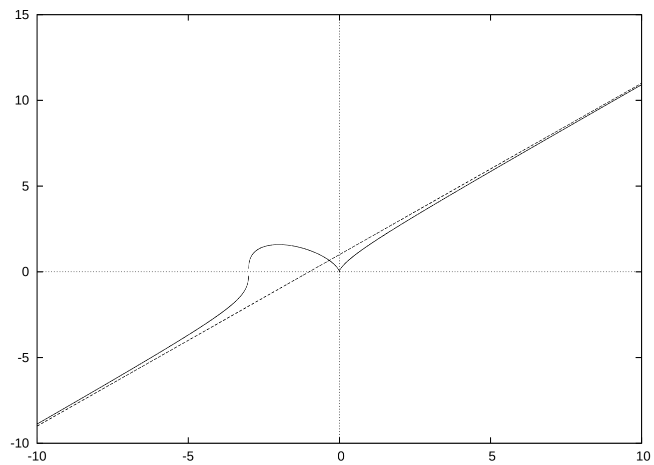


Figura 2: $f(x) = \sqrt[3]{x^2(3+x)}$ e asintoto $y = x + 1$

9.3 Esercizio

Studiare le funzioni

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$$
$$f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 1}$$
$$f(x) = |x|^{2/3}(x-1)^4$$
$$f(x) = \frac{x \log x}{1 + x}$$
$$f(x) = \log\left|\log(x^2 - 1)\right|$$
$$f(x) = x^x \quad \text{(si assuma } f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}\text{)}$$
$$f(x) = \cos x - \cos 2x$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

9.4 Sviluppi di Taylor

Alcuni sviluppi di Taylor attorno al punto 0:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

9.5 Regole per il calcolo dei limiti

Diciamo che f è *equivalente* a g per $x \to x_0$ ($f \sim g$) se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1\ .$$

Nel calcolo di limiti, ogni *fattore* può essere sostituito con uno equivalente. Notare che ogni funzione è equivalente ad una qualunque troncata del suo sviluppo di Taylor.

Se u è $o(f)$ e v è $o(g)$ (per $x \to x_0$), allora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+u(x)}{g(x)+v(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

9.6 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)}$$

9.6.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

che non è altro che un modo veloce di scrivere

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \frac{1}{\sin(3x)} \frac{3x}{2x} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

9.7 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\tan x}$$

9.7.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

9.8 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3 \log(1+x)}$$

9.8.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3 \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 \cdot x^2}{x^3 \cdot x} = \frac{1}{2}$$

9.9 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

9.9.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3/6}{x^2}=0$$

9.10 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}$$

9.10.1 Risoluzione

Da $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$ si ricava $\sin^2 x - x^2 = -x^4/3 + o(x^4)$ e dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3}{x^4}=-\frac{1}{3}$$

9.11 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2+\log(1+x^3)}{\sin x - x}$$

9.11.1 Risoluzione

Si ha $e^{x^2}=1+x^2+x^4/2+o(x^4)$, $\log(1+x^3)=x^3+o(x^3)$ e $\sin x - x = -x^3/6+o(x^4)$ da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2+\log(1+x^3)}{\sin x - x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/2+o(x^4)+x^3+o(x^3)}{-x^3/6+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{-x^3/6+o(x^3)}=-6$$

Cosa succede se si prende $e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$?

9.12 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

9.12.1 Risoluzione

Applicando la regola di de l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

9.13 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{x/(1+x)} \log(1+x)$$

9.13.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{x/(1+x)} \log(1+x) = \lim_{y\to 0^+} e^{(y-1)/y} \log y = \lim_{y\to 0^+} \frac{\log y}{e^{(1-y)/y}}$$

da cui, applicando la regola di de l'Hôpital

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\log y}{e^{(1-y)/y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1/y}{e^{(1-y)/y} \frac{-y-(1-y)}{y^2}} = \lim_{y\to 0^+} -\frac{y}{e^{(1-y)/y}} = 0$$

9.14 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{x^2(\tan x - x)}$$

9.14.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{x^2(\tan x - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{x^2 \cdot x^3/3}$$

da cui applicando varie volte la regola di de l'Hôpital (o considerando lo sviluppo di $\sin x$) si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{x^2 \cdot x^3/3} = \frac{3}{20}$$

9.15 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \log x\right)$$

9.15.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x\log x}{x}$$

e poiché $x\log x$ è infinitesimo per $x\to 0$ (vedi Esercizio 4.13), il limite vale $+\infty$.

9.16 Esercizio

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti ([$\log=\ln=\log_e$])

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin 3x+\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}\log|x|}{1-|x|^{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x^3}-x}{\log\left(\sin^2 x+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^3-x}}{\log(\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x+x}-e^x}{\log\left(\pi\cdot\tan^2 x+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{3^x-x-1}$$

9.17 Metodo di Newton

Supponiamo che f sia due volte derivabile in $[a,b]$, $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)\geq\delta>0$ e $0<f''(x)\leq M$ per ogni $x\in[a,b]$. Sia ξ l'unico punto (perché unico?) di (a,b) nel quale $f(\xi)=0$. Si scelga $x_1\in(\xi,b)$ e definiamo la successione $\{x_n\}$ (chiamata *metodo di Newton* per il calcolo di ξ):

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

1. La si interpreti geometricamente in termini di tangente al grafico di f;

2. si provi che $x_{n+1} < x_n$, $x_{n+1} > \xi$ e

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = \xi$$

3. ci si serva del teorema di Taylor per dimostrare che

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2$$

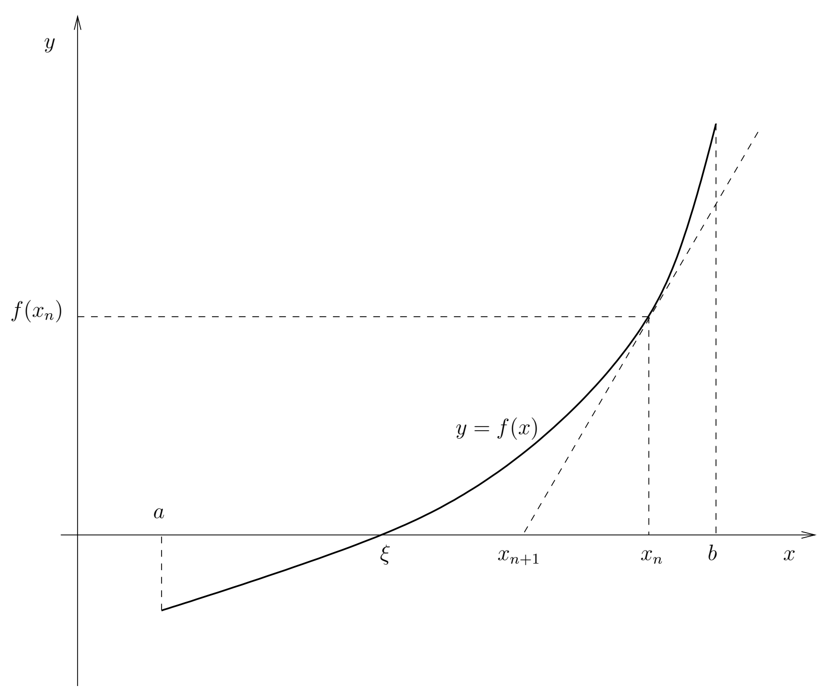
per $t_n \in (\xi, x_n)$;

4. si deduca che

$$0 < x_{n+1} - \xi \leq \frac{2\delta}{M}\left[\frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)\right]^{2^n}$$

9.17.1 Risoluzione

1. Interpretazione geometrica



2. per induzione: poiché $x_1 > \xi$, $f(x_1) > 0$ e dunque $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) < x_1$. Poi, per il teorema di Lagrange del valor medio,

$$f(x_1) - f(\xi) = f'(\eta)(x_1 - \xi), \;\; \eta \in (\xi, x_1)$$

da cui
$$\frac{f(x_1)}{f'(\eta)} = x_1 - \xi.$$
Poiché f' è strettamente crescente, $f(x_1)/f'(\eta) > f(x_1)/f'(x_1)$ e dunque
$$-x_2 = -x_1 + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < -\xi$$
Supponiamo ora che $x_n < x_{n-1}$ e $x_n > \xi$. Vogliamo dimostrare che $x_{n+1} < x_n$ e $x_{n+1} > \xi$ (si ripete il ragionamento di sopra). Per quanto riguarda il limite, poiché la successione $\{x_n\}$ è monotona decrescente e limitata dal basso da ξ, essa ha sicuramente limite, diciamo γ. Passando al limite nell'equazione (1), si ha
$$\gamma = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$
(f e f' sono continue, perché?) da cui $f(\gamma) = 0$. Poiché f ha un unico punto in cui si annulla, deve essere $\gamma = \xi$.

3.
$$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(t_n)(\xi - x_n)^2$$
e si conclude con qualche semplice passaggio.

4. per induzione:
$$0 < x_2 - \xi \leq \frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)^2 = \frac{2\delta}{M}\left[\frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)\right]^2$$
per ipotesi e per i punti precedenti. Supponiamo ora che
$$0 < x_n - \xi \leq \frac{2\delta}{M}\left[\frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)\right]^{2^{n-1}}$$
Per il punto precedente
$$0 < x_{n+1} - \xi \leq \frac{M}{2\delta}(x_n - \xi)^2$$
da cui
$$0 < x_{n+1} - \xi \leq \frac{M}{2\delta}\left(\frac{2\delta}{M}\right)^2\left[\frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)\right]^{2^n}$$

9.18 Esercizio

Completare la risoluzione dell'esercizio 9.17.

Adattare l'esercizio 9.17. all'ipotesi $-M \le f'' < 0$.

Cosa succede se $f'' \equiv 0$?

9.19 Esercizio

Sapendo che $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$, approssimare $\sqrt{2}$ usando solo le 4 operazioni fondamentali, con un errore minore di 10^{-15}.

9.20 Esercizio

Dimostrare che

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è un'approssimazione *al primo ordine* di $f'(x)$.

9.20.1 Risoluzione

Considerando lo sviluppo in serie di Taylor di $f(x+h)$ centrato in x

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\xi)\frac{h^2}{2}$$

(sotto le ipotesi necessarie), si ricava

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + f''(\xi)\frac{h}{2} = f'(x) + \mathcal{O}(h) \ .$$

9.21 Esercizio

Dimostrare che

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

è un'approssimazione *al secondo ordine* di $f'(x)$.

9.21.1 Risoluzione (traccia)

Basta considerare gli sviluppi in serie di Taylor (fino al terzo ordine) di $f(x+h)$ e $f(x-h)$ centrati in x.

9.22 Esercizio

Dimostrare che

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

è un'approssimazione *al secondo ordine* di $f''(x)$.

9.22.1 Risoluzione (traccia)

Basta osservare che

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h}$$

ed usare l'esercizio precedente.

10 Integrali indefiniti

10.1 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2}{3x-1}\mathrm{d}x$$

10.1.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{3}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\log|3x-1| + c$$

10.2 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2x}{3x-1}\mathrm{d}x$$

10.2.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2x}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{3x-1+1}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int 1+\frac{1}{3x-1}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x+\frac{2}{9}\log|3x-1|+c$$

10.3 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$$

10.3.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-3} + \frac{-2}{x-2}\mathrm{d}x = 2\log|x-3| - 2\log|x-2| + c$$

10.4 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$$

10.4.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{3x+4}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int \frac{13}{x-3} + \frac{-10}{x-2}\mathrm{d}x = 13\log|x-3| - 10\log|x-2| + c$$

10.5 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$$

10.5.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{2}{x-2} + c$$

10.6 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$$

10.6.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{2x+3}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2}\mathrm{d}x = 2\log|x-2| - \frac{7}{x-2} + c$$

10.7 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$$

10.7.1 Risoluzione

Si ha

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x = \arctan(x+1) + c$$

10.8 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{3x+6}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x$$

10.8.1 Risoluzione

Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+6}{x^2+2x+2} \mathrm{d}x = 3\int \frac{x+2}{(x+1)^2+1} \mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)+2}{(x+1)^2+1} \mathrm{d}x = \\ = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1} + \frac{2}{(x+1)^2+1} \mathrm{d}x = \\ = \frac{3}{2}\log(x^2+2x+2) + 3\arctan(x+1) + c\end{aligned}$$

10.9 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{x^2+x-2}{(x^2+2x+2)(x-2)} \mathrm{d}x$$

10.9.1 Risoluzione

Si esegue la scomposizione

$$\frac{x^2+x-2}{(x^2+2x+2)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{C}{x-2}$$

10.10 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x$$

10.10.1 Risoluzione

Moltiplicare numeratore e denominatore per $\cos x$ e poi eseguire la sostituzione $y = \sin x$. Alternativamente, eseguire subito la sostituzione $t = \tan(x/2)$, da cui $\cos x = (1-t^2)/(1+t^2)$. Il risultato è

$$\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c$$

10.11 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x$$

10.11.1 Risoluzione

Usare l'identità

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

oppure eseguire la sostituzione $t = \tan(x/2)$, da cui $\sin x = 2t/(1+t^2)$. Il risultato è

$$\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x = \log \left| \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right| + c$$

10.12 Esercizio

Calcolare

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x$$

10.12.1 Risoluzione

Usare l'indentità

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

oppure integrare per parti. Il risultato è

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

10.13 Esercizio

Calcolare

$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x$$

10.13.1 Risoluzione

Usare l'identità

$$\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x)$$

Il risultato è

$$\int \sin^3 x \mathrm{d}x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$

10.14 Esercizio

Calcolare

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

10.14.1 Risoluzione

Eseguire la sostituzione $x = \sin y$ oppure $x = \cos y$. Spiegare l'apparente diversità dei risultati. Il risultato è

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\arcsin x}{2} + c = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{\arccos x}{2} + d$$

10.15 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$$

10.15.1 Risoluzione

Eseguire la sostituzione $\sqrt{x+1} = y$. Il risultato è

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = \frac{2(x+1)^{3/2}}{3} + 2\sqrt{x+1} + c$$

10.16 Esercizio

Calcolare

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

10.16.1 Risoluzione

Eseguire la sostituzione $x = (e^y - e^{-y})/2$. Il risultato è

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

10.17 Esercizio

Calcolare

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

10.17.1 Risoluzione

Eseguire la sostituzione $x = (e^y - e^{-y})/2$. Il risultato è

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{2} + c$$

10.18 Esercizio

Calcolare

$$\int \log x \mathrm{d}x$$

10.18.1 Risoluzione

Si ha $\log x = 1 \cdot \log x$ e si integra per parti. Il risultato è

$$\int \log x \mathrm{d}x = x \log x - x + c$$

10.19 Esercizio

Calcolare

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

per parti.

10.19.1 Risoluzione

Si ha

$$\sqrt{1-x^2} = 1 \cdot \sqrt{1-x^2}$$

10.20 Esercizio

Calcolare

$$\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$$

per parti.

10.20.1 Risoluzione

Si ha

$$\sqrt{1+x^2} = 1 \cdot \sqrt{1+x^2}$$

e ci si serve dell'Esercizio 10.16.

11 Integrali definiti

11.1 Area dell'ellisse

Calcolare l'area dell'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

11.1.1 Risoluzione

Ricavando

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

si ha che l'area A dell'ellisse è

$$A=4\cdot\int_0^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=4\int_0^{\pi/2}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 y}\cdot a\cos y\mathrm{d}y=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 y\mathrm{d}y=$$
$$=4ab\left(\frac{y}{2}+\frac{\sin 2y}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}=4ab\frac{\pi}{4}=\pi ab$$

11.2 Legge oraria per il moto rettilineo

Consideriamo un punto che si muove su una retta e siano $s(t)$ la posizione occupata dal punto (rispetto all'origine), $v(t)$ la velocità del punto e $a(t)$ l'accelerazione del punto al tempo t. Chiaramente si ha $s'(t)=v(t)$ e $v'(t)=a(t)$, da cui

$$s(t_2)-s(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}v(t)\mathrm{d}t,\quad v(t_2)-v(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}a(t)\mathrm{d}t$$

La relazione $x=s(t)$ si chiama *legge oraria* del moto.

11.3 Esercizio

Sia $a(t)=te^{-t}$ l'accelerazione al tempo t di un punto che si muove di moto rettilineo e siano $v(0)=5$ e $s(0)=3$. Determinare la legge oraria del moto.

11.3.1 Risoluzione

Si ha

$$v(t)-v(0)=\int_0^t\tau e^{-\tau}\mathrm{d}\tau=-e^{-\tau}\Big|_0^t-\int_0^t(-e^{-\tau})\mathrm{d}\tau=-e^{-\tau}(\tau+1)\Big|_0^t=-e^{-t}(t+1)+1$$

da cui $v(t) = -e^{-t}(t+1) + 6$. Infine

$$s(t) - s(0) = \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau = \dots$$

11.4 Baricentro

Dato un segmento $[a, b]$ di massa

$$M = \int_a^b \mathrm{d}M = \int_a^b m(x)\mathrm{d}x$$

(ove $m(x)$ si chiama *densità di massa*), il suo *baricentro* è il punto

$$B = \frac{\int_a^b x\mathrm{d}M}{M} = \frac{\int_a^b xm(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b m(x)\mathrm{d}x}$$

11.5 Esercizio

Calcolare il baricentro di un segmento $[a, b]$ con densità di massa costante $m(x) = m$.

11.5.1 Risoluzione

Si ha

$$B = \frac{\int_a^b xm\mathrm{d}x}{\int_a^b m\mathrm{d}x} = \frac{\frac{mx^2}{2}\Big|_a^b}{mx|_a^b} = \frac{b+a}{2}$$

11.6 Esercizio

Calcolare

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

ove $T_n(x)$ è il polinomio di Chebyshev di grado n (vedi 1.5).

11.6.1 Risoluzione (traccia)

Eseguire il cambiamento di variabile $\arccos x = y$ e integrare due volte per parti.

11.7 Volume solidi di rotazione

Data $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, consideriamo la regione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dalle rette $x = a$, $x = b$ e $y = 0$. Il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse x di tale regione è dato da

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$$

Data $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $a > 0$, consideriamo la regione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dalle rette $x = a$, $x = b$ e $y = 0$. Il volume del solido di rotazione delimitato dalla rotazione attorno all'asse y di tale regione è dato da

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

11.8 Esercizio

Calcolare i volumi degli ellissoidi che si ottengono facendo ruotare l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rispettivamente attorno all'asse x e attorno all'asse y.

11.8.1 Risoluzione

Attorno all'asse x:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

Attorno all'asse y: considerando la funzione $y = b\sqrt{a^2 - x^2}/a$ ristretta al semipiano positivo delle x, la sua inversa è $x = a\sqrt{b^2 - y^2}/b$ e pertanto il volume è

$$V = 2 \cdot \pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)\mathrm{d}y = 2\pi \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^b = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

Oppure si usa la formula

$$V = 2\pi \int_a^b x b\sqrt{a^2 - x^2}/a \mathrm{d}x$$

11.9 Esercizio

Calcolare il volume del *toro* ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y del cerchio di raggio r e centro $(R, 0)$.

11.9.1 Risoluzione (traccia)

Si tratta di applicare la formula

$$V = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} x\sqrt{1-(x-R)^2}\mathrm{d}x$$

11.10 Esercizio

Calcolare il volume della "clessidra" delimitata dalla rotazione attorno all'asse y del grafico di $\arccos x$.

11.10.1 Risoluzione (traccia)

Si tratta di applicare la formula

$$V = 2\pi \int_{0}^{1} x \arccos x \mathrm{d}x$$