8 Teoremi del calcolo differenziale

8.1 Esercizio

Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{\sin 2x}{1 + \sin x}$$
e tracciarne un grafico approssimativo.

8.1.1 Risoluzione

L'insieme di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{-\pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ La funzione è periodica di periodo 2π: basta studiarla nell'intervallo $[0, 2\pi)$.

La funzione interseca l'asse $x = 0$ in $(0, 0)$ e l'asse $y = 0$ in $\{(k\pi/2, 0),\ k = 0, 1, 2\}$

Il numeratore è non negativo per $2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi$, dunque per $k\pi \leq x \leq \pi/2 + k\pi$, mentre il denominatore è sempre positivo (nell'insieme di definizione). Dunque $f(x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq \pi/2$ e $\pi \leq x < 3\pi/2$

La derivata prima è
$$f'(x) = \frac{2(1 - \sin^2 x - \sin x)}{1 + \sin x}$$
ed è definita in tutto l'insieme di definizione. Essa si annulla per $\sin x = (\pm\sqrt{5} - 1)/2$. Posto $\xi = \arcsin\big((\sqrt{5} - 1)/2\big)$ ($\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$), la derivata prima si annulla per $x = \xi$ e $x = \pi - \xi$. Inoltre la derivata prima è non negativa per $(-\sqrt{5} - 1)/2 \leq \sin x \leq (\sqrt{5} - 1)/2$, cioè per $0 \leq x \leq \xi$ o $\pi - \xi \leq x < 2\pi$. Dunque la funzione $f(x)$ è crescente per $0 \leq x \leq \xi$, $\pi - \xi \leq x < 3\pi/2$ e $3\pi/2 < x < 2\pi$. In $x = \xi$ c'è un massimo relativo e in $x = \pi - \xi$ un minimo relativo.

Si ha poi
$$\lim_{x\to 3\pi/2} \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(2y + 3\pi)}{1 + \sin(y + 3\pi/2)} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin(2y)}{1 - \cos y} =$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{-2\sin y \cos y(1 + \cos y)}{1 - \cos^2 y} = \lim_{y\to 0} \frac{-2\cos y(1 + \cos y)}{\sin y} = \infty$$
Ciò è sufficiente per ottenere il grafico in Figura 1.

8.2 Esercizio

Studiare la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(3 + x)}$$
e tracciarne un grafico approssimativo.

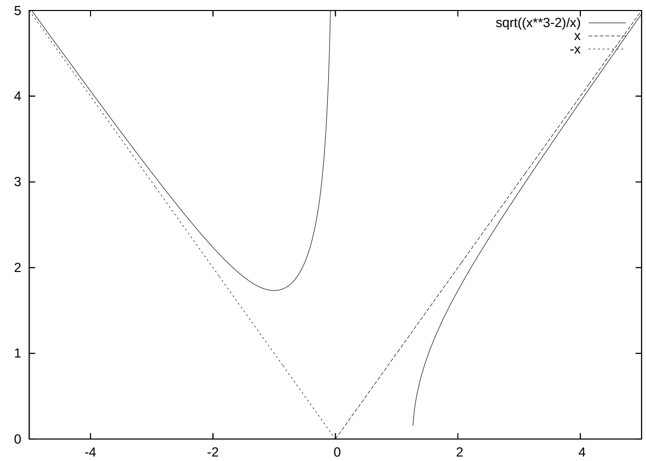


Figura 1: $f(x) = \sin 2x/(1 + \sin x)$

8.2.1 Risoluzione

L'insieme di definizione è $\mathbb{R}$.

La funzione interseca l'asse $x = 0$ in $(0, 0)$ e l'asse $y = 0$ in $(0, 0)$ e $(-3, 0)$.

La funzione è non negativa quando $3 + x \geq 0$, cioè $x \geq -3$.

I limiti a $+\infty$ e $-\infty$ valgono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$. Poiché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(3+x)}}{x} = 1 = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

esiste un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, ove

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{x^2(3+x)} - x =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{x^2(3+x)} - x) \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x^2(3+x)}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^2(3+x)} + x^2}{\left(\sqrt[3]{x^2(3+x)}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^2(3+x)} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(3+x) - x^3}{\left(\sqrt[3]{x^2(3+x)}\right)^2 + x\sqrt[3]{x^2(3+x)} + x^2} = 1$$

La derivata prima è

$$f'(x) = \frac{x(2+x)}{\left(\sqrt[3]{x^2(3+x)}\right)^2} = \frac{2+x}{\sqrt[3]{x(3+x)^2}}$$

e non è definita per $x = -3$ e $x = 0$, ove si ha

$$\lim_{x\to-3} f'(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = \infty$$

Inoltre la derivata prima è nulla per $x = -2$ e non negativa per $2x + x^2 \geq 0$, cioè per $x \leq -2$ ($x \neq -3$) o $x > 0$ e dunque lì la funzione è crescente. In $x = -2$ c'è un massimo relativo, in 0 un minimo relativo.

La derivata seconda è

$$f''(x) = \left(x(3+x)^2\right)^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}(2+x)\left(x(3+x)^2\right)^{-\frac{4}{3}}\left((2+x)^2 + x \cdot 2 \cdot (3+x)\right) =$$
$$= -\frac{2}{x(3+x)\sqrt[3]{x(3+x)^2}}$$

ed è non negativa per $3 + x < 0$, cioè $x < -3$. Dunque la funzione $f(x)$ è convessa per $x < -3$.

Ciò è sufficiente per ottenere il grafico in Figura 2.

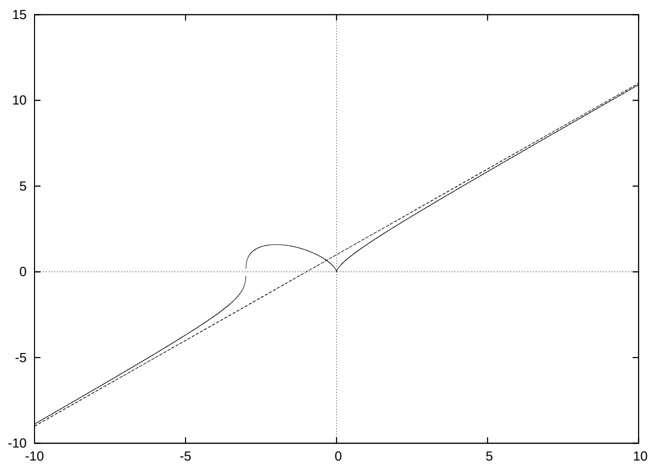


Figura 2: $f(x) = \sqrt[3]{x^2(3+x)}$ e asintoto $y = x + 1$

8.3 Esercizio

Studiare le funzioni

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$$
$$f(x) = x - \sqrt[3]{x^3 - 1}$$
$$f(x) = |x|^{2/3}(x-1)^4$$
$$f(x) = \frac{x \log x}{1+x}$$
$$f(x) = \log\left|\log(x^2-1)\right|$$
$$f(x) = x^x \quad (\text{si assuma } f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R})$$
$$f(x) = \cos x - \cos 2x$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

8.4 Sviluppi di Taylor

Alcuni sviluppi di Taylor attorno al punto 0:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

8.5 Regole per il calcolo dei limiti

Diciamo che f è *equivalente* a g per $x \to x_0$ ($f \sim g$) se

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1\ .$$

Nel calcolo di limiti, ogni *fattore* può essere sostituito con uno equivalente. Notare che ogni funzione è equivalente ad una qualunque troncata del suo sviluppo di Taylor.

Se u è $o(f)$ e v è $o(g)$ (per $x \to x_0$), allora

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)+u(x)}{g(x)+v(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

8.6 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)}$$

8.6.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

che non è altro che un modo veloce di scrivere

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \frac{1}{\sin(3x)} \frac{3x}{2x} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

8.7 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\tan x}$$

8.7.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + \sin x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x} + o(\sqrt{x})}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$$

8.8 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3 \log(1+x)}$$

8.8.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin^2 x}{x^3 \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 \cdot x^2}{x^3 \cdot x} = \frac{1}{2}$$

8.9 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

8.9.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3/6}{x^2}=0$$

8.10 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}$$

8.10.1 Risoluzione

Da $\sin x = x - x^3/6 + o(x^4)$ si ricava $\sin^2 x - x^2 = -x^4/3 + o(x^4)$ e dunque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3}{x^4}=-\frac{1}{3}$$

8.11 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2+\log(1+x^3)}{\sin x - x}$$

8.11.1 Risoluzione

Si ha $e^{x^2}=1+x^2+x^4/2+o(x^4)$, $\log(1+x^3)=x^3+o(x^3)$ e $\sin x - x = -x^3/6+o(x^4)$ da cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2+\log(1+x^3)}{\sin x - x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4/2+o(x^4)+x^3+o(x^3)}{-x^3/6+o(x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{-x^3/6+o(x^3)}=-6$$

Cosa succede se si prende $e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)$?

8.12 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$$

8.12.1 Risoluzione

Applicando la regola di de l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

8.13 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{x/(1+x)} \log(1+x)$$

8.13.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{x/(1+x)} \log(1+x) = \lim_{y\to 0^+} e^{(y-1)/y} \log y = \lim_{y\to 0^+} \frac{\log y}{e^{(1-y)/y}}$$

da cui, applicando la regola di de l'Hôpital

$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\log y}{e^{(1-y)/y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1/y}{e^{(1-y)/y}\,\frac{-y-(1-y)}{y^2}} = \lim_{y\to 0^+} -\frac{y}{e^{(1-y)/y}} = 0$$

8.14 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{x^2(\tan x - x)}$$

8.14.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{x^2(\tan x - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{x^2 \cdot x^3/3}$$

da cui applicando varie volte la regola di de l'Hôpital (o considerando lo sviluppo di $\sin x$) si ottiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - 6x + x^3}{x^2 \cdot x^3/3} = \frac{3}{20}$$

8.15 Esercizio

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} + \log x\right)$$

8.15.1 Risoluzione

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+\log x\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x\log x}{x}$$

e poiché $x\log x$ è infinitesimo per $x\to 0$ (vedi Esercizio 4.13), il limite vale $+\infty$.

8.16 Esercizio

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti ([$\log=\ln=\log_e$])

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin 3x+\cos x)^{\frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\tan\frac{1}{x}\right)^{x^3}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}\log|x|}{1-|x|^{\sin x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2-x^3}-x}{\log\left(\sin^2 x+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^3-x}}{\log(\cos x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin^2 x+x}-e^x}{\log\left(\pi\cdot\tan^2 x+1\right)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{3^x-x-1}$$

8.17 Metodo di Newton

Supponiamo che f sia due volte derivabile in $[a,b]$, $f(a)<0$, $f(b)>0$, $f'(x)\geq\delta>0$ e $0<f''(x)\leq M$ per ogni $x\in[a,b]$. Sia ξ l'unico punto (perché unico?) di (a,b) nel quale $f(\xi)=0$. Si scelga $x_1\in(\xi,b)$ e definiamo la successione $\{x_n\}$ (chiamata *metodo di Newton* per il calcolo di ξ):

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

1. La si interpreti geometricamente in termini di tangente al grafico di f;

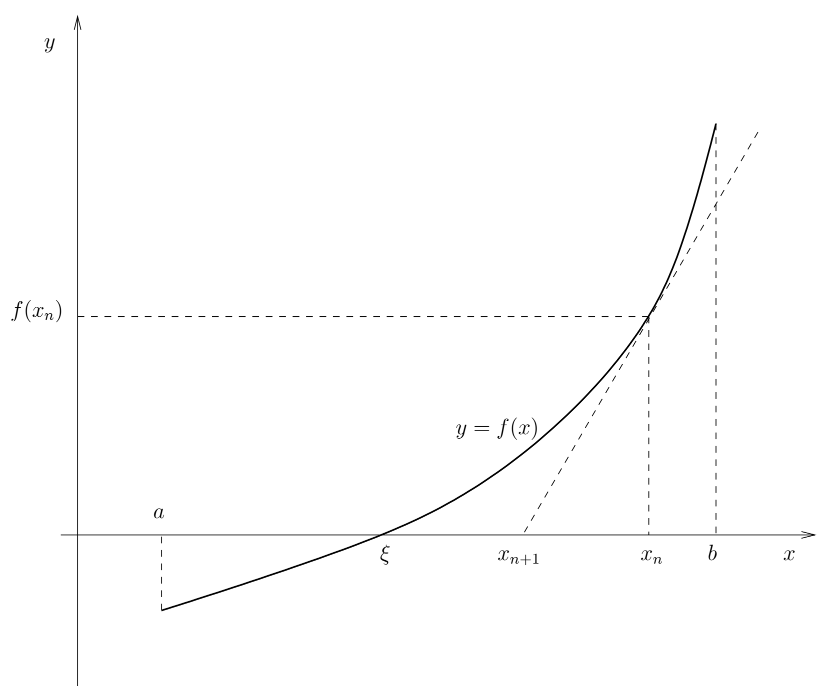
2. si provi che $x_{n+1} < x_n$, $x_{n+1} > \xi$ e
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \xi$$

3. ci si serva del teorema di Taylor per dimostrare che
$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2$$
per $t_n \in (\xi, x_n)$;

4. si deduca che
$$0 < x_{n+1} - \xi \leq \frac{2\delta}{M}\left[\frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)\right]^{2^n}$$

8.17.1 Risoluzione

1. Interpretazione geometrica



2. per induzione: poiché $x_1 > \xi$, $f(x_1) > 0$ e dunque $x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1) < x_1$. Poi, per il teorema di Lagrange del valor medio,
$$f(x_1) - f(\xi) = f'(\eta)(x_1 - \xi),\ \eta \in (\xi, x_1)$$

da cui

$$\frac{f(x_1)}{f'(\eta)} = x_1 - \xi.$$

Poiché f' è strettamente crescente, $f(x_1)/f'(\eta) > f(x_1)/f'(x_1)$ e dunque

$$-x_2 = -x_1 + \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} < -\xi$$

Supponiamo ora che $x_n < x_{n-1}$ e $x_n > \xi$. Vogliamo dimostrare che $x_{n+1} < x_n$ e $x_{n+1} > \xi$ (si ripete il ragionamento di sopra). Per quanto riguarda il limite, poiché la successione $\{x_n\}$ è monotona decrescente e limitata dal basso da ξ, essa ha sicuramente limite, diciamo γ. Passando al limite nell'equazione (1), si ha

$$\gamma = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)}$$

(f e f' sono continue, perché?) da cui $f(\gamma) = 0$. Poiché f ha un unico punto in cui si annulla, deve essere $\gamma = \xi$.

3. $$f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{1}{2} f''(t_n)(\xi - x_n)^2$$

   e si conclude con qualche semplice passaggio.

4. per induzione:

   $$0 < x_2 - \xi \leq \frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)^2 = \frac{2\delta}{M}\left[\frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)\right]^2$$

   per ipotesi e per i punti precedenti. Supponiamo ora che

   $$0 < x_n - \xi \leq \frac{2\delta}{M}\left[\frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)\right]^{2^{n-1}}$$

   Per il punto precedente

   $$0 < x_{n+1} - \xi \leq \frac{M}{2\delta}(x_n - \xi)^2$$

   da cui

   $$0 < x_{n+1} - \xi \leq \frac{M}{2\delta}\left(\frac{2\delta}{M}\right)^2\left[\frac{M}{2\delta}(x_1 - \xi)\right]^{2^n}$$

8.18 Esercizio

Completare la risoluzione dell'esercizio 8.17.

Adattare l'esercizio 8.17. all'ipotesi $-M \le f'' < 0$.

Cosa succede se $f'' \equiv 0$?

8.19 Esercizio

Dimostrare che

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è un'approssimazione *al primo ordine* di $f'(x)$.

8.19.1 Risoluzione

Considerando lo sviluppo in serie di Taylor di $f(x+h)$ centrato in x

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(\xi)\frac{h^2}{2}$$

(sotto le ipotesi ncessarie), si ricava

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + f''(\xi)\frac{h}{2} = f'(x) + \mathcal{O}(h) \ .$$

8.20 Esercizio

Dimostrare che

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

è un'approssimazione *al secondo ordine* di $f'(x)$.

8.20.1 Risoluzione (traccia)

Basta considerare gli sviluppi in serie di Taylor (fino al terzo ordine) di $f(x+h)$ e $f(x-h)$ centrati in x.

8.21 Esercizio

Dimostrare che

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

è un'approssimazione *al secondo ordine* di $f''(x)$.

8.21.1 Risoluzione (traccia)

Basta osservare che

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \frac{\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}}{h}$$

ed usare l'esercizio precedente.