Metodo degli elementi finiti per le equazioni di Navier-Stokes

Francesco Visentin
Dottorato di Ricerca in Informatica - XXVIII Ciclo

Università degli Studi di Verona

Fluidodinamica

- Le equazioni di Navier-Stokes (NS) sono le equazioni di base quando si parla di moto dei fluidi.
- Le equazioni classiche di NS nella loro forma non semplificata non hanno una soluzione generale in forma chiusa, e vengono risolte in tal modo solo con la fluidodinamica computazionale (CFD).
- A seconda del problema fisico possono essere semplificate in diversi modi. In alcuni casi ciò permette di ottenere una soluzione analitica in forma chiusa.

Fluidodinamica

Prima di considerare le equazioni di NS rivediamo qualche definizione utile per i flussi:

- Fluido comprimibile: quando le variazioni di densità hanno effetti apprezzabili sulla soluzione. In fluidodinamica spesso si considerano problemi in cui i fluidi sono *incompressibili*.
- Flusso viscoso: l'attrito del fluido ha effetti significativi sulla soluzione del campo fluidodinamico. Per valutare se gli effetti viscosi viene definito il *numero di Reynolds*.
- Flusso stazionario: tutte le grandezze risultano essere indipendenti dal tempo. Permettono una forte semplificazione delle equazioni di NS ed hanno applicazione in una grande varietà di problemi.
- Flusso turbolento: flussi in evoluzione caotica di strutture coerenti, il moto delle particelle del fluido avviene in maniera disordinata, senza seguire traiettorie lineari come nel caso di regime laminare.

Equazioni di Navier-Stokes

Equazioni di Navier-Stokes

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u}_t - \mu \Delta \mathbf{u} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = &\quad f \\ \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = &\quad 0 \end{aligned} \tag{1}$$

- $\mathbf{u}$ è il vettore delle velocità,
- p è la pressione,
- ρ è la densità del fluido,
- μ è la viscosità dinamica,
- f rappresenta le forze che agiscono sul corpo (es. gravità).

Fluido compressibile e non stazionario

- Partiamo con il considerare il caso che il fluido sia: comprimibile e non stazionario.
- Ne scriviamo le equazioni in funzione del tempo e per il caso bidimensionale (coordinate cartesiane).

$$
\begin{aligned}
\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\
\rho\frac{\partial v}{\partial t} - \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \rho u\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \qquad (2) \\
\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0
\end{aligned}
$$

Semplificazioni

- Spesso in fluidodinamica si considerano flussi stazionari in quanto riescono a descrivere una grande varietà di problemi.
- Possiamo ottenere un modello a partire dall'equazione 2.
  1. togliamo la dipendenza dal tempo;
  2. se assumiamo ρ costante, possiamo inglobare un suo multiplo all'interno della velocità;
  3. la forza gravitazionale può essere inglobata in p;
  4. la pressione p può essere scalata usando ρ;
  5. la viscosità dinamica (μ), scalata per ρ da origina alla *viscosità cinematica* (ν).

Fluido incompressibile e stazionario

Caso bidimensionale (coordinate cartesiane)

$$
\begin{aligned}
-\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\
-\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\
\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

L'importaza di ν

- Nel risolvere le equazioni di NS, la grandezza ν misura il bilanciamento tra il termine di diffusione e quello non lineare della quantità di moto.
- Se ν va a zero le soluzioni diventano irregolari e i flussi da laminari diventano turbolenti.
- Computazionalmente l'equazione diventa difficile da risolvere; i problemi con dipendenza dal tempo diventano instabili.

Possiamo introdurre il numero di Raynold che è una grandezza a-dimensionale usata per stimare il rapporto tra la diffusione e il termine non lineare:

$$Re = \frac{\rho||\mathbf{u}||L}{\mu} = \frac{||\mathbf{u}||L}{\nu} \tag{4}$$

L'equazione di Stokes
Fluido stazionario e incompressibile

- Se la viscosità ν è sufficientemente grande, il termine non lineare può essere non considerato.
- Otteniamo così l'equazione di Stokes.

$$\begin{aligned} -\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ -\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

- Le equazioni sono lineari in u, v, e p e quindi risulta più semplice lavararci.
- Risultano molto utili quando si vogliono risolvere le equazioni di NS perché forniscono un valido punto da cui partire.

Soluzioni numeriche

La soluzione di questo sistema portano a diverse difficoltá:

- struttura complicata del fluido $\rightarrow$ mesh molto fini;
- Re $>> 1 \rightarrow$ si deve raffinare localmente e utilizzare mesh non isotropiche ai bordi;
- forti effetti non lineari $\rightarrow$ problemi di stabilità;
- $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \rightarrow$ soluzioni implicite;
- quantità facilmente influenzabili $\rightarrow$ mesh adattate alla soluzione

Soluzioni accurate richiedono calcolatori potenti in particolare se si passa dal 2D al 3D, oppure da flussi stazionari a non stazionari o se si vogliono risultati quantitativi esatti anziché risultati qualitativi.

Metodi numerici

Diversi sono i metodi impiegati per risolvere queste equazioni:

- Metodo delle differenze
- Metodo degli elementi finiti
- Metodo dei volumi finiti
- Metodi spettrali di Galerkin

Condizione LBB

Prima di cominciare ...

- Quando si utilizzano i FEM per risolvere le equazioni di NS non si possono utilizzare funzioni di base qualsiasi.
- L'interazione tra le equazioni del momento e di continuità può causare a problemi di stabilità.
- Questo problema è legato alle condizioni di *Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi* (LBB) riguardo alla discretizzazione tramite i metodi di Galerkin.
- Ci sono molti metodi per risolvere il problema. Quello più usato è quello di utilizzare due funzioni base distinte per la pressione e per la velocità.
- Uno schema tipico di Taylor-Hood consiste nell'utilizzare una base di grado inferiore per la pressione.

Soluzioni con FreeFem++

Due metodi standard per risolvere sistemi non lineari sono:

- Metodo del punto fisso
- Metodo di Newton

Ci focalizziamo sul secondo metodo in quanto generalmente converge più rapidamente.

- Implementare il metodo di Newton può essere molto laborioso in quando si deve calcolare l'espressione analitica del Jacobiano.
- Altro problema è quello di ottenere un *guess* iniziale abbastanza vicino alla soluzione.

Metodo di Newton

I passi fondamentali dell'algoritmo di Newton sono i seguenti:

1. valutare il Jacobiano DF che soddisfa
   $F(x + \delta x) = F(x) + DF(x)(\delta x)$
2. scegliere qualche soluzione iniziale x_0
3. trovare δx_i tale che $DF(x_i)\delta x_i = -F(x_i)$,
   quindi porre $x_{i+1} = x_i - \delta x_i$
4. ripetere (3) fino a che $|\delta x_i|$ è sufficientemente piccolo

Metodo di Newton

Equazioni stazionarie

Consideriamo due distinti spazzi V e Π. Siano $\mathbf{v} \in VxV$ e $q \in \Pi$ le funzioni test. Formulazione debole del problema:

$$F(\mathbf{u}, p) = \int_{\Omega} ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \; + \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - p \nabla \cdot \mathbf{v} - q \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (6)$$

E il suo Jacobiano:

$$\begin{aligned} DF(\mathbf{u}, p)(\delta\mathbf{u}, \delta p) = \int_{\Omega} & ((\delta\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \\ & + \frac{1}{Re} \nabla \delta\mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \delta p \nabla \cdot \mathbf{v} - q \nabla \cdot \delta\mathbf{u} \end{aligned} \quad (7)$$

Da notate che le variabili in cui l'equazione va risolta sono $\delta\mathbf{u}$ e δp; $\mathbf{u}$ e p vengono forniti ad ogni passo dell'iterazione.

Implementazione in FreeFem++

Equazioni di NS

Risolviamo $DF(x_i)\delta x_i + F(x_i) = 0$

```
problem NSNewton([du1,du2,dp],[v1,v2,q],init=1) =
     int2d(Th)(nu*(Grad(du1,du2)'*Grad(v1,v2))
          + UgradV(du1,du2,u1,u2)'*[v1,v2]
          + UgradV(u1,u2,du1,du2)'*[v1,v2]
          - 1e-8*dp*q
          - div(du1,du2)*q - div(v1,v2)*dp)
          - int2d(Th)(nu*(Grad(u1,u2)'*Grad(v1,v2))
          + UgradV(u1,u2,u1,u2)'*[v1,v2]
          - div(u1,u2)*q - div(v1,v2)*p)
          + on(1,2,3,4,du1=0,du2=0);
```

Dove *nu* è $\frac{1}{Re}$ e **u** e **v** sono stati suddivisi nelle loro componenti *u1*, *u2*, *v1* e *v2*.

Implementazione in FreeFem++

Macro

```
macro Grad(u1,u2) [dx(u1),dy(u1) , dx(u2),dy(u2) ] //
macro div(u1,u2) (dx(u1)+dy(u2)) //
macro UgradV(u1,u2,v1,v2) [ [u1,u2]'*[dx(v1),dy(v1)] ,
                            [u1,u2]'*[dx(v2),dy(v2)] ] //
```

Condizioni al bordo

Condizioni di Dirichlet:

- $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = (u_\Omega, v_\Omega)$
- nessuna condizione su p

Condizioni di Neumann:

- $\mu(\nabla n \cdot n) - pn = (\gamma_{N,1}, \gamma_{N,2}) = \sigma \cdot n$
- Indica la tensione sulle pareti

Condizioni iniziali

- È necessario fornire una stima iniziale per la distribuzione delle velocità e della pressione. Non sempre possiamo utilizzare il flusso in stato di riposo ($\mathbf{u} = 0$ e $p = cost$) poiché questa situazione iniziale può non essere compatibile con le condizioni al bordo del problema.
- Una possibile soluzione è quella di utilizzare come soluzione iniziale le equazioni di Stokes (5).

Implementazione in FreeFem++

Equazioni di Stokes

```
problem stokes([u1,u2,p],[v1,v2,q]) =
     int2d(Th)(nu*Grad(u1,u2)'*Grad(v1,v2)
          - 1e-8*p*q
          - div(u1,u2)*q - div(v1,v2)*p)
          + on(1,2,4,u1=0,u2=0) + on(3,u1=1,u2=0);
```

Implementazione in FreeFem++

Esempi

- Driven cavity problem
- Kármán Vortex Streets

Per entrambi i casi vedremo i risultati per fluidi incompressibili sia nel caso stazionario che non stazionario.