NOTE DI TRIGONOMETRIA

18 settembre 2007

1 Introduzione

In queste note, essenzialmente basate su [1], vengono richiamate le definizioni e le proprietà delle funzioni trigonometriche. Un buon libro di liceo è indicato per colmare le molte omissioni di questi (scarni) appunti, in particolar modo in riferimento ad esercizi e problemi.

2 Funzione avvolgimento e funzioni seno e coseno

Siano Π il piano e $C \in \Pi$ un suo punto. Un *circolo* (o circonferenza) in Π di centro C e raggio $r \in \mathbb{R}^*_+$ è il luogo geometrico dei punti $P \in \Pi$ che distano r da C.
Un circolo possiede due naturali versi di percorrenza, *orario* e *antiorario* (accettiamo questo fatto come postulato). Fissiamo, ora, un punto U su un circolo e percorriamo il circolo a partire da U in verso orario o antiorario, per una lunghezza pari a s (se $s \geq 2\pi r$ si fa un intero giro e quindi si andrà avanti nel verso scelto di $s - 2\pi r$; se invece $s \geq 4\pi r$ si fanno due giri e ...). Quindi partendo da un punto U si può percorrere una circonferenza, in verso antiorario od orario, per un arco di lunghezza s. Per convenzione poniamo come *positivo* il verso di percorrenza antiorario. Ricordiamo che si definisce radiante quell'angolo il cui arco corrispondente è lungo come il raggio; ciò permette di esprimere gli angoli mediante la lunghezza degli archi, l'angolo è cioè fornito dal rapporto tra l'arco e il raggio del circolo. Se il circolo ha raggio unitario allora l'angolo è dato dall'arco.
Ricordiamo ora che se in Π viene fissato un sistema di riferimento cartesiano (ortonormale monometrico), si definisce una biiezione tra Π e $\mathbb{R}^2$.
Quindi l'insieme

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} |\, x^2 + y^2 = 1\}$$

"è" essenzialmente[1] il *circolo unitario* in $\mathbb{R}^2$.

A questo punto possiamo definire una funzione, detta *funzione avvolgimento*

$$\rho : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

come segue: $\rho(0) = (1, 0)$ e fissato $\theta \in \mathbb{R}^*$, $\rho(\theta)$ è quel punto che si ottiene in S^1 partendo da $U = (1, 0)$ e percorrendo su S^1 un arco di lunghezza $|\theta|$, nel verso orario se $\theta < 0$, antiorario se $\theta > 0$.
Dal momento che la circonferenza è lunga 2π i valori di ρ si ripetono ogni qualvolta θ aumenta (o diminuisce) di $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Osservazione 1. Empiricamente la funzione ρ si può realizzare prendendo un disco (il cui raggio sarà l'unità di misura) su cui segnamo alcuni punti (rispetto al sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico di origine il centro del disco e unità di misura il raggio del disco): $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Poi si prende un filo sottile (inestensibile) su cui si segnano alcuni valori rispetto all'unità di misura (cioè il raggio del disco): $(0, 1, -1, \frac{\pi}{2}, \ldots)$. Quindi si porta a coincidere lo zero segnato sul filo col punto $(1, 0)$ sul disco e si avvolge strettamente il filo al disco. I punti corrispondenti vengono così a sovrapporsi.

[1] Il significato di questo è virgolettato, sarà più chiaro quando verrano affrontati i corsi di analisi e geometria.

Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $\rho(\theta) \in S^1$ può essere scomposto nelle due componenti

$$\rho(\theta) = (\rho_1(\theta), \rho_2(\theta))$$

In altre parole, conoscere ρ è equivalente a conoscere le funzioni $\rho_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\rho_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ date da, $\rho_1 = \mathrm{pr}_1 \circ \rho$, $\rho_2 = \mathrm{pr}_2 \circ \rho$, in cui pr_1 e pr_2 sono le proiezioni di $\mathbb{R}^2$ sul primo e secondo fattore di $\mathbb{R}^2$, cioè, in riferimento al sistema cartesiano introdotto, sono le proiezioni sull'asse delle x e y, rispettivamente.

Definizione 2. Diciamo funzione **seno** la funzione ρ_2 e funzione **coseno** la funzione ρ_1.

Le funzioni coseno e seno, quindi, sono le componenti della funzione avvolgimento. Inoltre le proprietà della funzione ρ si traducono nelle proprietà delle funzioni coseno e seno.

In primo luogo si ha l'*identità fondamentale*:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Poiché l'insieme di definizione della funzione ρ (e delle sue componenti) è l'asse reale, l'insieme di definizione sia del seno che del coseno è $\mathbb{R}$ e essendo l'immagine di ρ il quadrato di lato 1 si ricava che l'immagine del seno e del coseno è $[-1, 1]$.
Inoltre, $\rho_1(-\theta) = \rho_1(\theta)$ e $\rho_2(-\theta) = -\rho_2(\theta)$, cioè le funzioni coseno e seno sono *pari* e *dispari*, rispettivamente.

È semplice determinare alcuni valori delle funzioni seno e coseno, come riassunto nella Tabella 1, aiutandosi con dei disegni e con la relazione fondamentale.

angolo	valore seno	valore coseno
0	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0
π	0	-1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0

Tabella 1: valori seno e coseno

Possiamo ora disegnare il grafico del seno (e procedendo in maniera analoga del coseno), in un riferimento cartesiano in cui l'angolo θ funge da variabile indipendente. Notiamo che essendo θ un angolo orientato, ha senso assegnargli valori negativi. Ha senso inoltre, assegnare a θ anche valori maggiori dell'angolo giro 2π (o minori -2π, rispettivamente), considerando il fatto che θ e $\theta + 2\pi$ individuano lo stesso angolo da un punto di vista geometrico, ma sono due numeri reali distinti. In questo modo si conta la periodicità dell'angolo. Possiamo costruire il grafico per punti, in base alla Tabella 1.

3 Alcune proprietà del seno e del coseno

3.1 Indentità trigonometriche

È semplice verificare alcune relazioni a cui soddisfano le funzioni seno e coseno. Per verificare tali proprietà è utile effettuare un disegno di ciò che si sta considerando.

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta)$$
$$\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$$

Queste relazioni ci dicono che le funzioni seno e coseno sono funzioni periodiche[2] di periodo 2π.

[2]Vedi oltre per la definizione e alcune proprietà delle funzioni periodiche.

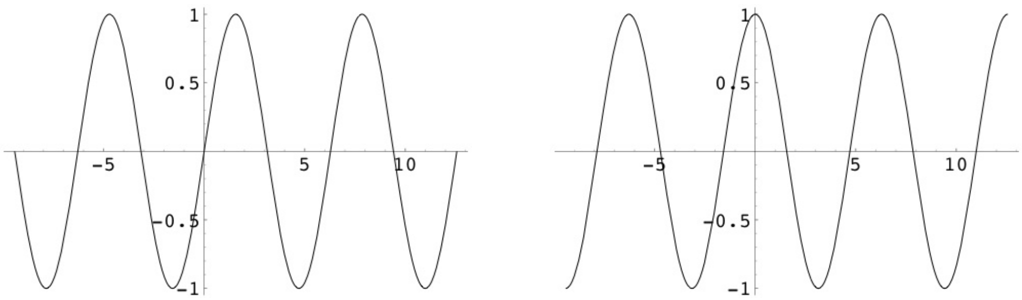

Grafico del seno e del coseno

$$\begin{aligned}
\sin(\pi-\theta) &= \sin(\theta)\\
\cos(\pi-\theta) &= -\cos(\theta)\\
\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cos(\theta)\\
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \sin(\theta)
\end{aligned} \tag{1}$$

3.2 Formule di addizione

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha
\end{aligned} \tag{2}$$

Assumendo la validità della prima, ad esempio, le rimanenti si ricavano da essa e dalle (1).

3.3 Formule di duplicazione

$$\begin{aligned}
&\cos 2\theta = \cos^2\theta-\sin^2\theta = 2\cos^2\theta-1 = 1-2\sin^2\theta\\
&\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{3}$$

3.4 Formule di bisezione

$$\begin{aligned}
|\cos\frac{\theta}{2}| &= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\\
|\sin\frac{\theta}{2}| &= \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}
\end{aligned} \tag{4}$$

3.5 Formule di prostaferesi

$$\begin{aligned}
\cos\alpha+\cos\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\cos\alpha-\cos\beta &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\sin\alpha+\sin\beta &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\\
\sin\alpha-\sin\beta &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

4 Tangente

Definiamo in maniera algebrica la funzione tangente. Consideriamo i valori dell'angolo θ, in modo che il coseno non sia nullo ($\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$). Definiamo tangente dell'angolo θ, indicata con $\tan\theta$ il rapporto tra il seno e il coseno:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \tag{6}$$

È immediato ricavare alcuni valori notevoli della tangente a partire da quelli del seno e del coseno. A partire dal grafico del seno e del coseno (effettuando il quoziente dei grafici punto per punto) oppure per punti si ricava il grafico della tangente.

5 Cotangente

Similmente a quanto fatto per la tangente dell'angolo θ, definiamo algebricamente la cotangente dell'angolo θ. Consideriamo quei valori dell'angolo tali per cui il seno sia non nullo e cioè $\theta \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, allora la cotangente dell'angolo θ è

$$\operatorname{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{7}$$

A partire dal grafico del coseno e del seno oppure per punti si ricava il grafico della cotangente.

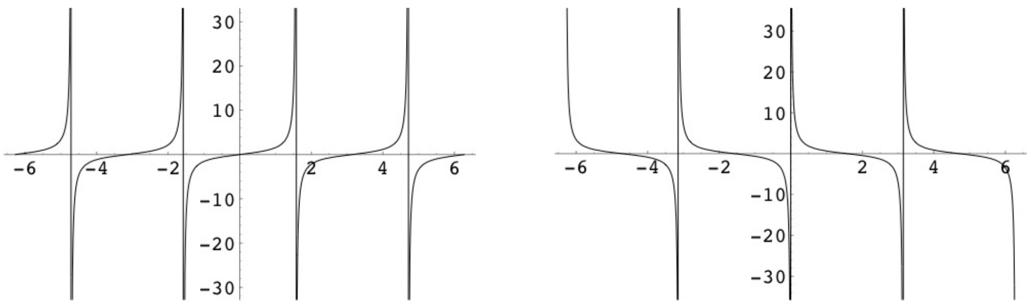

Grafico della tangente e della cotangente

6 Alcune proprietà della tangente e della cotangente

Le proprietà fondamentali della tangente e della cotangente sono facilmente ottenibilii da quelle del seno e del coseno oppure direttamente dalla definizione.

7 "Inverse" delle funzioni trigonometriche

Le funzioni seno e coseno sono definite su tutto $\mathbb{R}$ e hanno per codominio $\mathbb{R}$, da cui si ricava facilmente che non sono iniettive e quindi non sono invertibili. Tuttavia, dato un valore tra $[-1, 1]$ è importante e utile poter determinare, almeno a meno della periodicità, i corrispondenti valori angolari, rispetto al seno o al coseno. Un'anologa argomentazione può essere fatta per le funzioni tangente e arcotangente. Dal momento che le funzioni trigonometriche non sono invertibili e tuttavia vogliamo risolvere il nostro problema dobbiamo definire delle altre funzioni, a partire dalle funzioni trogonometriche stesse, effettuando opportuni restringimenti di insieme di definizione in modo che queste nuove funzioni siano invertibili. Con un abuso di notazione, continueremo ancora a chiamare le funzioni ottenute per restrizione *seno*, *coseno* etc, indicando la restrizione di dominio.

7.1 arcsin e arccos

Consideriamo la funzione seno, ricordiamo che essa è definita come la proiezione ρ_2 sul secondo fattore della funzione avvolgimento ρ e quindi è naturalmente una funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Per indurre dalla funzione seno una funzione che sia anche iniettiva è sufficiente restringere l'insieme di defiizione all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

in cui abbiamo anche esplicitato la restrizione del codominio all'immagine. A questo punto possiamo definire l'inversa della funzione seno e la chiamiamo *funzione arcoseno*, e la denotiamo con

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

come la funzione tale che

$$\sin \circ \arcsin(x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

in cui ora con sin intendiamo l'usuale funzione seno. È semplice ottenere il grafico della funzione arcseno a partire dal grafico di $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$

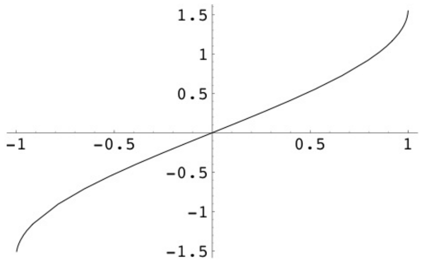

Grafico di arcsin

In maniera analoga a quanto fatto per il seno si definisce la *funzione arccoseno*

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

come la funzione tale che

$$\cos \circ \arccos(x) = x, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

in cui cos denota l'usuale coseno. Il grafico dell'arcoseno è

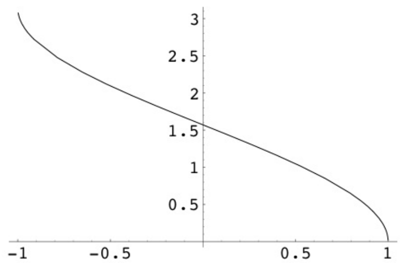

Grafico di arccos

Esempio 1. Determinare le soluzioni dell'equazione

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sol.
La domanda che ci viene posta è per quali valori di $\theta \in \mathbb{R}$ è verificata la precedente ugualianza? Osserviamo che la domanda ammette necessariamente una risposta affermativa, dal momento che il secondo membro dell'equazione è un numero compreso tra -1 e 1. Cerchiamo di rispondere per

gradi usando la funzione arcsin. In primo luogo restringiamo la nostra ricerca ai valori di θ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ per cui l'uguaglianza è verificata. La soluzione del primo passo è a questo punto ovvia, $\theta = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$, inoltre sappiamo che $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ora ampliamo la nostra ricerca di soluzioni dell'equazione ad un periodo $[-\pi, \pi]$. Nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione sin assume il valore $\frac{\sqrt{3}}{3}$ per due valori dell'angolo θ

$$\theta = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ oppure } \theta = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Infine, tenendo conto della periodicità della funzione seno, si ricava che l'equazione di partenza è verificata se e solo se

$$\theta = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ oppure } \theta = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$$

7.2 arctan e arccotan

Definiamo ora l'inversa di un'opportuna restrizione della tangente. In base al grafico della tangente si osserva semplicemente che una sua qualsiasi restrizione ad un intervallo aperto $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$ fissato è iniettiva e quindi invertibile. Allora la seguente restrizione della tangente

$$\tan|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

è invertibile. Chiamiamo *arcotangente* la sua inversa, ossia la funzione

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

tale che $\tan \circ \arctan(x) = x$ per ogni x in $\mathbb{R}$. Il grafico dell'arcotangente è

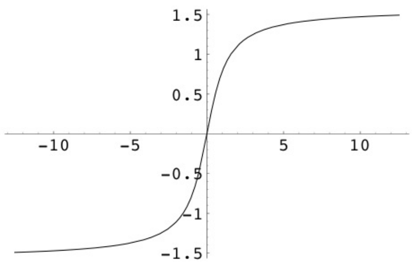

Grafico di arctan

In maniera del tutto analoga si definisce l'inversa di una restrizione della cotangente. Restringiamo la cotangente all'intervallo aperto $(0, \pi)$, allora l'inversa di tale restrizione è la funzione *arcotangente*

$$\text{arccotan} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$$

tale che per ogni x in $\mathbb{R}$ si ha $\text{cotan} \circ \text{arccotan}(x) = x$.

Esercizio 1. Risolvere le seguenti disuguaglianze.

- $\sin\theta > \cos\theta$
- $\sin^2\theta - \cos\theta - 1 \leq 0$
- $\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} + \cos\theta - \sin\theta < 0$

8 Funzioni periodiche

Definizione 3. sia $X \subset \mathbb{R}$, Y insieme, $f : X \longrightarrow Y$ applicazione. Un numero reale $\tau \in \mathbb{R}$ si dice **periodico** per f se per ogni $x \in X$, $x + \tau \in X$, $x - \tau \in X$ e

$$f(x + \tau) = f(x)$$

N.B. 1. Ogni funzione ammette 0 come periodo.

Definizione 4. $f : X \longrightarrow Y$ si dice *periodica* se f ammette almeno un periodo non nullo.

Esempio 2. Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π e le funzioni tangente e cotangente sono periodiche di periodo 2π.

Riferimenti bibliografici

[1] G. de Marco, *Analisi zero.* Decibel-Zanichelli, Padova 1981.