

Esercizi sulle disequazioni

1 Disequazioni razionali fratte

Esempio 1. Risolviamo la seguente disequazione razionale fratta:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4} \geq 0 \quad (1)$$

Scomponiamo il numeratore. Il discriminante è: $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, quindi il numeratore ammette due radici reali distinte:

$$x = \frac{3+1}{4} \quad \text{oppure} \quad x = \frac{3-1}{4}$$

e quindi $2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(x - \frac{1}{2})$. Il denominatore si scompone immediatamente:

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

Per cui (1) si riscrive:

$$\frac{(x-1)(x - \frac{1}{2})}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Effettuiamo ora lo studio del segno dell'ultima espressione.

L'insieme delle soluzioni è $\mathcal{S} = \{2 < x \cup \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \cup x < -2\}$.

Esempio 2.

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - x + 1} \leq 0 \quad (2)$$

(N) La scomposizione è semplice $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$

(D) Il discriminante è $\Delta = -3$, quindi il denominatore non ammette radici reali.

Quindi la (2) diviene:

$$\frac{(x+1)(x+4)}{x^2 - x + 1} \leq 0$$

Effettuiamo ora lo studio del segno dell'ultima espressione.

L'insieme delle soluzioni è $\mathcal{S} = \{-5 \leq x \leq -1\}$.

Esercizio 1. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti disequazioni.

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 + 3x - 1}{3x^2 - 4} &\leq 0 \\ \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x^2 - x + 2} &\leq 0 \\ \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 7x + 6} &> 0 \\ \frac{x^2 - 5x + 5}{9 - x^2} &< 0 \\ \frac{2x - 1}{x - 3} &\leq \frac{x + 1}{x - 1} \\ \frac{7x - 4}{x^2 - 4} - \frac{2}{x - 2} &< \frac{7}{x + 2} \\ \frac{x^3 + x^2}{3} + \frac{x^2}{x + 3} &< x^3 - \frac{x^2}{3x + 9} \\ x(x - 2) &< \frac{9 - x}{x_1} \\ \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 3x + 2} &> 0 \\ \frac{x^2 - 4x + 1}{-x^2 + 12x - 3} &> 0 \\ \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2} &< 0 \end{aligned}$$

2 Disequazioni con i moduli

Esempio 3. Risolvere la seguente disequazione

$$|x - 3| > |x^2 + 3x + 2| \quad (3)$$

L'argomento del modulo a secondo membro è positivo per $x \leq -2 \cup x \geq -1$ e negativo per $-2 < x < -1$. Mentre l'argomento del modulo a primo membro è positivo per $x \leq 3$ e negativo per $x < 3$.

Ci siamo quindi ricondotti alla risoluzione dei seguenti sistemi

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ -x^2 - 2x - 5 > 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x < -2 \cup -1 \leq x < 3 \\ -x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < -1 \\ x^2 + 2x + 5 > 0 \end{cases} \quad (6)$$

Cominciamo a risolvere il sistema (4).

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 + 2x + 5 < 0 \end{cases}$$

La seconda disequazione non è verificata per alcun valore di $x \in \mathbb{R}$ e quindi il sistema (4) è impossibile.

Il sistema (5) diviene

$$\begin{cases} x < -2 \cup -1 \leq x < 3 \\ -2 - \sqrt{3} < x < -2\sqrt{3} \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni di (5) è $\mathcal{S}_2 = \{-2 - \sqrt{3} < x < -2 \cup -1 \leq x < -2 + \sqrt{3}\}$.

L'insieme delle soluzioni del sistema (6) è $\mathcal{S}_3 = \{-2 \leq x < -1\}$.

Per cui l'insieme delle soluzioni della disequazione (3) è $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 = \{-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3}\}$.

Esercizio 2. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni.

$$\begin{aligned} \frac{|x-2| + |x+3|}{x^2 - 3x + 1} &< 0 \\ \frac{|3x^2 + 2x^2 - 2|}{x^2 - 4} - 1 &\leq 0 \\ \left| \frac{x-1}{2+x} \right| &> \frac{1}{2} \\ \frac{3 - |x+1|}{|2-x| - 4} &\leq 0 \\ \frac{x^2 + |x-2|}{x^2 - |x+2|} &> 0 \\ \left| \frac{2x-1}{1-x} \right| &< 1 \\ x^2 - 3|x| + 2 &> 0 \\ |\sin x| + |\cos x| &\leq 1 \\ |\sin x| - |\cos x| &\geq 0 \\ |x^2 - 3x + 2| &\geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3 Disequazioni irrazionali

Esempio 4.

$$\sqrt{x^2 - x} - x + 1 < 0 \tag{7}$$

Condizioni di esistenza

$$\text{C.E.} = \{x^2 - x \leq 0\} = \{0 \leq x \leq 1\}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - x < x^2 - 2x + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + x - 1 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1 \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Osserviamo che $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1$ per cui tale sistema risulta impossibile e quindi l'equazione (7) non è mai verificata.

Esercizio 3. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni.

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 - 5x + 2} &> 3x^2 - x - 1 \\ \sqrt{|x^2 - 7x + 10|} - 3x - 1 &> x^2 \\ \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x^2 - 1} &\leq 1 \\ \sqrt{x} + x - 3 &> 0 \\ x^4 - 1 &> \sqrt{-2x - x^4} \\ 2x - 1 &< \sqrt{1 - x^2} \\ \sqrt{1 + x^2} &= |x| \\ \sqrt{2x - 1} &< \sqrt{1 - x^2} \\ |\sqrt{x} - x| &\leq 1 \end{aligned}$$

4 Disequazioni coi logaritmi

Esempio 5. Risolvere la seguente equazione

$$\ln(x^2 - 5x + 6) \geq 1 \quad (8)$$

Condizioni di esistenza:

$$\begin{aligned} C.E. &= \{x^2 - 5x + 6 \geq 0\} \\ &= \{x < 2 \cup x > 3\} \end{aligned}$$

La (8) la si può riscrivere come:

$$\ln(x^2 - 5x + 6) \geq \ln(e)$$

quest'ultima è vera se e solo se è vera la disuguaglianza tra gli argomenti:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &\geq e \\ x^2 - 5x + 6 - e &\geq 0 \end{aligned}$$

Il discriminante è $\Delta = 25 - 24 + 4e$, quindi

$$\left(x - \frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2}\right) \left(x - \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow x < \frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2} \cup x > \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2}$$

Infine controlliamo quali soluzioni sono accettabili confrontandole con le condizioni di esistenza.

Si ha che $\mathcal{S} = \left\{x < \frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2} \cap x > \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2}\right\}$.

Esercizio 4. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni.

$$\begin{aligned} \log_2(x^2 - 5x + 3) &< 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{1 + x^2}\right) &< 1 \\ \frac{1}{2}\log(3x + 5) + \frac{1}{2}\log x &= 1 \\ \frac{\log x + 5}{\log x + 2} - \frac{2}{5}(\log x + 5) &= -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

5 Disequazioni con gli esponenziali

Esempio 6.

$$5^{2x-4} - 5^{x-1} - 12 > 0 \quad (9)$$

Si noti che la (9) si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} (5^{x-2})^2 - 5^{x-1+1-1} - 12 &> 0 \\ (5^{x-2})^2 - 5 \cdot 5^{x-2} - 12 &> 0 \end{aligned}$$

Ora poniamo $t = 5^{x-2}$, da cui si ottiene:

$$t^2 - 5t - 12 < 0$$

Il discriminante è $\Delta = 25 + 48 = 73 > 0$ e quindi

$$\left(t - \frac{5 - \sqrt{73}}{2}\right) \left(t - \frac{5 + \sqrt{73}}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow t < \frac{5 - \sqrt{73}}{2} \cup t > \frac{5 + \sqrt{73}}{2}$$

Tornando alla variabile x , la soluzione è $5^{x-2} < \frac{5 - \sqrt{73}}{2} \cup 5^{x-2} > \frac{5 + \sqrt{73}}{2}$. La prima disuguaglianza non è mai verificata, dal momento che $\frac{5 - \sqrt{73}}{2} < 0$; la seconda è invece accettabile. Prendiamo il logaritmo in base 5 di ambo i membri della seconda, ottenendo

$$\log_5(5^{x-2}) > \log_5\left(\frac{5 + \sqrt{73}}{2}\right)$$

cioè $\mathcal{S} = \left\{x > \log_5\left(\frac{5 + \sqrt{73}}{2}\right) + 2\right\}$.

Esercizio 5. Determinare l'insieme delle soluzioni delle seguenti equazioni.

$$\begin{aligned}
 3^{2x-4} - 4 \cdot 3^{x-2} + 3 &> 0 \\
 4^{x+1} \cdot 8^{2x-3} &< \frac{2^{1+x}}{16} \\
 (3^{x+1})^{x-2} \cdot 9^{3x+2} &> 81^{x+2} \\
 x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} &\geq x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}
 \end{aligned}$$

6 Esercizi di ricapitolazione

Esercizio 6.

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{x-3}{2x+1} \right| &\geq \frac{1}{2} \\
 |x+3| - |x-1| &\leq 0 \\
 x^4 - 6x^2 + 8 &< 0 \\
 x^3 + x^2 - 2 &< 0 \\
 \frac{1}{2x} + |2x-1| &< 2 \\
 |\cos x| &< \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \left| \frac{|x|-3}{x-3} \right| &< 2 \\
 1 + \sqrt{2(\ln x)^2 + 3 \ln x - 2} &> \ln x \\
 2^{1+x^2} \log(1+x^2) &< 2^{10} \\
 |x-1| &\leq x^2 - 3 \\
 |x^2 - 3x - 2| &< x + 1 \\
 |x|^3 - 2x(1+|x|) &< 0 \\
 \sqrt{x^2 - x + 1} &\leq x - 1 \\
 \sqrt{x^2 - 2x + 4} &\geq x - 2 \\
 \sqrt{3x - x^2 + 1} &\leq 2x - 1 \\
 (x^2 + 2x)e^x &\leq 0 \\
 \frac{\ln x}{x^2} &> 0 \\
 \frac{x}{x+1} e^{-x} &> 0 \\
 \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{x^2 + 7x + 12} &\leq 0
 \end{aligned}$$

Riferimenti bibliografici

- [1] G. de Marco, *Analisi zero*. Decibel-Zanichelli, Padova 1981.