PROVA PRATICA DI METODI NUMERICI
PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Prof. De Marchi Stefano, Dott. Caliari Marco[1]

Verona, 23 Settembre 2008

Si consideri l'equazione di diffusione-trasporto

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\dfrac{\partial u}{\partial x}u(x,t) = d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}u(x,t) & (x,t) \in (a,b) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = \cos(2\pi x) & x \in (a,b) \\ u(a,t) = u(b,t) = 1 & t \in (0,+\infty) \end{cases}$$

con $a = 0$, $b = 1$, $c = 20$, $d = 1$.

1. Si approssimi la soluzione al tempo finale $T = 0.1$ mediante il metodo delle linee, usando differenze finite centrate del secondo ordine nello spazio e il metodo di Eulero esponenziale nel tempo. Si usi un passo di discretizzazione spaziale pari a $\bar{h} = 1/400$. La soluzione ottenuta sarà chiamata *di riferimento*. Si disegni la soluzione nel range $(x, u(x,T)) \in [0,1] \times [-1, 1.1]$ e nel range $(x, u(x,T)) \in [0,1] \times [0.99, 1.01]$.

2. Tra i passi di discretizzazione spaziale $h_1 = 1/5$, $h_2 = 1/10$, $h_3 = 1/20$, $h_4 = 1/50$ e $h_5 = 1/100$, si dica quali soddisfano la condizione di stabilità data dal numero di Peclét di griglia (o locale). Per tali passi, si calcoli con il medesimo metodo descritto sopra, la soluzione allo stesso tempo finale. Si mostri che l'errore in norma infinito rispetto alla soluzione di riferimento (calcolato sui nodi di discretizzazione spaziale comuni) decade con la giusta velocità.

3. Si approssimi la soluzione al medesimo tempo finale usando il passo di discretizzazione spaziale $\bar{h}$ e il θ-metodo nel tempo. Si confrontino le soluzioni date dai metodi di Eulero esplicito, Eulero implicito e Crank–Nicolson con la soluzione di riferimento, usando i passi temporali $k_1 = T/25$, $k_2 = T/50$, $k_3 = T/100$ e si mostri che per gli ultimi due metodi l'errore in norma infinito decade con la giusta velocità. Cosa si può dire del metodo di Eulero esplicito?

4. Si approssimi la soluzione sempre a $T = 0.1$ usando il passo di discretizzazione spaziale $\bar{h}$ e lo Strang splitting nel tempo, combinando opportunamente i metodi Eulero esponenziale e Lax–Wendroff. Si confrontino le soluzioni usando i passi temporali $k_2 = T/50$, $k_3 = T/100$, $k_4 = T/200$ e si mostri l'andamento dell'errore in norma infinito. Perchè non decade come ci si aspetta dallo Strang splitting?

Si producano uno o più files `.m`, *dettagliatamente commentati*, per la soluzione dei quesiti proposti. Si cerchi, per quanto possibile, di curare anche l'efficienza dell'implementazione.

[1] Inviare i files `.m` (tutti con nome, cognome e numero di matricola) all'indirizzo `marco.caliari@univr.it`