Compitino

Filosofia della Scienza - Gianluigi Bellin

November 18, 2013

2. Esercizi di traduzione e di valutazione. (Si scriva la chiave di lettura). **20 punti.**

2.(i). **Si formalizzi** la proposizione seguente:

O tutti sono ubriachi o nessuno è ubriaco.

2 punti

$$(\forall x.U(x)) \vee \neg(\exists y.U(y)) \quad \text{o la formula equivalente} \quad (\forall x.U(x)) \vee (\forall y.\neg U(y))$$

2.(ii). **Si applichi la procedura semantic tableaux** alla formula 2.(i).

4 punti

$$\begin{array}{cl}
\text{ramo aperto} & \\
\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2; U(\mathbf{a}_2) \Rightarrow U(\mathbf{a}_1) & \\
\hline
\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2: \Rightarrow U(\mathbf{a}_1), \neg U(\mathbf{a}_2) & \neg\ \mathrm{R} \\
\hline
\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1; \Rightarrow U(\mathbf{a}_1), \forall y \neg U(y) & \forall\ \mathrm{R} \\
\hline
\mathbf{a}_0; \Rightarrow \forall x.U(x), \forall y.\neg U(y) & \forall\ \mathrm{R} \\
\hline
\mathbf{a}_0; \Rightarrow (\forall x.U(x)) \vee (\forall y.\neg U(y)) & \vee\ \mathrm{R}
\end{array}$$

2.(iii). Se 2(i) è falsificabile si construisca un modello $\mathcal{M} = (D, U_M)$ che la falsifica.

4 punti

$$\mathcal{M} = (D, U^{\mathcal{M}}) \quad \text{dove} \quad D = \{0, 1, 2\}, U^{\mathcal{M}} = \{2\}.$$

Infatti

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \models (\forall x.U(x)) \vee (\forall y.\neg U(y)) & \text{sse} & \mathcal{M} \models \forall x.U(x) \text{ oppure } \mathcal{M} \models \forall y.\neg U(y), \\
 & \text{sse} & \text{per ogni } d \in D, \mathcal{M} \models U(x)[x := d] \\
 & & \text{oppure per ogni } d \in D, \mathcal{M} \models \neg U(y)[y := d] \\
 & \text{sse} & \textbf{falso} \text{ oppure } \textbf{falso}; \\
 & & \text{infatti } \mathcal{M} \not\models U(x)[x := 1] \text{ perché } 1 \notin U^{\mathcal{M}} = \{2\} \\
 & & \text{e } \mathcal{M} \models U(y)[y := 2] \text{ dato che } 1 \notin U^{\mathcal{M}} = \{2\}.
\end{array}$$

2.(iv). **Si formalizzi** la proposizione seguente:

Non è vero che o tutti sono ubriachi o nessuno lo è e neppure è vero che tutti sono ubriachi e qualcuno non lo è.

2 punti

$$\neg[(\forall x.U(x)) \vee (\forall y.\neg U(y))] \wedge \neg[(\forall x.U(x)) \wedge (\exists y.\neg U(y))]$$

2.(v). **Si applichi la procedura semantic tableaux** alla formula 2.(iv).

4 punti

Applicando la procedura semantic tableaux dopo quattro passi otteniamo l'albero seguente.

$$\wedge \text{ R}\ \dfrac{\neg \text{ R}\ \dfrac{\vee \text{ L}\ \dfrac{\overset{d_1}{{}_{\mathbf{a}_0;}\forall x.U(x) \Rightarrow \bot} \qquad \overset{d_2}{{}_{\mathbf{a}_0;}\forall y.\neg U(y) \Rightarrow \bot}}{{}_{\mathbf{a}_0;}(\forall x.U(x)) \vee (\forall y.\neg U(y)) \Rightarrow \bot}}{{}_{\mathbf{a}_0;} \Rightarrow \neg[(\forall x.U(x)) \vee (\forall y.\neg U(y))]} \qquad \dfrac{\overset{d_3}{{}_{\mathbf{a}_0;}(\forall x.U(x)) \wedge (\exists y.\neg U(y)) \Rightarrow \bot}}{{}_{\mathbf{a}_0;} \Rightarrow \neg[(\forall x.U(x)) \wedge (\exists y.\neg U(y))]}\ \neg \text{ R}}{{}_{\mathbf{a}_0;} \Rightarrow \neg[(\forall x.U(x)) \vee (\forall y.\neg U(y))] \wedge \neg[(\forall x.U(x)) \wedge (\exists y.\neg U(y))]}$$

Il ramo destro d_3 è chiuso. Infatti è *contraddittorio* assumere che tutti siano ubriachi e allo stesso tempo che qualcuno non lo sia.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1;}\forall x.U(x), U(\mathbf{a}_0), \overline{U(\mathbf{a}_1) \Rightarrow U(\mathbf{a}_1)}}{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1;}\forall x.U(x) \Rightarrow U(\mathbf{a}_1)}\ \forall \text{ L}}{{}_{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1;}\forall x.U(x), \neg U(\mathbf{a}_1) \Rightarrow \bot}\ \neg \text{ L}}{{}_{\mathbf{a}_0;}\forall x.U(x), \exists y.\neg U(y) \Rightarrow \bot}\ \exists \text{ L}}{{}_{\mathbf{a}_0;}(\forall x.U(x)) \wedge (\exists y.\neg U(y)) \Rightarrow \bot}\ \wedge \text{ L}$$

Invece i due rami sinistri d_1 e d_2 sono aperti. Risulta infatti che sono *falsificabili* (ma non contraddittorie) entrambe le proposizioni che tutti siano ubriachi e che tutti non siano ubriachi, come mostrato dalle strutture $\mathcal{M}_1$ e $\mathcal{M}_2$ nella parte 2.(vi).

$$\overset{\mathcal{M}_1}{\dfrac{{}_{\mathbf{a}_0;}U(\mathbf{a}_0), \forall x.U(x) \Rightarrow \bot}{{}_{\mathbf{a}_0;}\forall x.U(x) \Rightarrow \bot}} \qquad \overset{\mathcal{M}_2}{\dfrac{\dfrac{{}_{\mathbf{a}_0;}\forall y.\neg U(y) \Rightarrow U(\mathbf{a}_0)}{{}_{\mathbf{a}_0;}\neg U(\mathbf{a}_0), \forall y.\neg U(y) \Rightarrow \bot}}{{}_{\mathbf{a}_0;}\forall y.\neg U(y) \Rightarrow \bot}}$$

2.(vi). Se 2.(iv) è falsificabile si construisca un modello $\mathcal{M} = (D, U_M)$ che la falsifica.

4 punti

Poniamo

$$\mathcal{M}_1 = (D, U^{\mathcal{M}}) \quad \text{dove} \quad D = \{0\}, U^{\mathcal{M}} = \{0\}.$$

$$\begin{array}{rll} \mathcal{M}_1 \models (\forall x.U(x)) \Rightarrow \bot & \text{sse} & \mathcal{M}_1 \models \forall x.U(x) \text{ implica } \textbf{falso}, \\ & \text{sse} & \text{per ogni } d \in D, \mathcal{M}_1 \models U(x)[x := d] \text{ implica } \textbf{falso} \\ & \text{sse} & \mathcal{M}_1 \models U(x)[x := 0] \text{ implica } \textbf{falso} \\ & \text{sse} & \textbf{vero} \text{ implica } \textbf{falso}. \\ & & \text{Infatti } 0 \text{ è l'unico elemento in } D \text{ e } 0 \in U^{\mathcal{M}_1} = \{0\}. \end{array}$$

Poniamo

$$\mathcal{M}_2 = (D, U^{\mathcal{M}}) \quad \text{dove} \quad D = \{0\}, U^{\mathcal{M}} = \{\} = \emptyset.$$

$$
\begin{array}{rll}
\mathcal{M}_2 \models (\forall y.\neg U(y)) \Rightarrow \bot & \text{sse} & \mathcal{M}_2 \models \forall y.\neg U(y) \text{ implica } \textbf{falso}, \\
& \text{sse} & \text{per ogni } d \in D, \mathcal{M} \not\models U(x)[x := d] \text{ implica } \textbf{falso} \\
& \text{sse} & \textbf{vero} \text{ implica } \textbf{falso}. \\
& & \text{Infatti } 0 \text{ è l'unico elemento in } D \text{ e } 0 \notin U^{\mathcal{M}_2} = \{\}.
\end{array}
$$

3. Esercizi di traduzione e di derivazione. (Si scriva la chiave di lettura).
20 punti.

3.(i). **Si scrivano espressioni del calcolo dei predicati** $\forall x.F(x)$, $\forall y.G(y)$, P, Q che formalizzino le seguenti proposizioni. Si indichi la chiave di lettura.

$\forall x.F(x)$: *"Nessun Montecchi è amato dal Sig Capuleti"*

soluzione: $\forall x.M(x) \to \neg A(c, x)$.

$\forall y.G(y)$ *"Capuleti ama tutti quelli che sono amati da Giulietta"*

soluzione: $\forall y.A(g, y) \to A(c, y)$.

P: *"Giulietta ama Romeo"* soluzione: $A(g, r)$.

Q: *"Romeo è un Montecchi."* soluzione: $M(r)$.

4 punti

3.(ii) **Si applichi la procedura "semantic tableaux"** alla seguente espressione,

$$\forall x.F(x), \forall y.G(y), P, Q \Rightarrow \bot$$

dove $\forall x.F(x), \forall y.G(y), P, Q$ sono le formule ottenute nell'esercizio 3.(i).
Si usino queste abbreviazioni (o i puntini "...") per semplificare la derivazione.

4 punti

$$
\dfrac{
  \dfrac{}{{}_{c,g,r:}\dots M(r) \Rightarrow M(r)}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{}{{}_{c,g,r:}\dots A(g,r) \Rightarrow A(g,r)}
        \qquad
        \dfrac{}{{}_{c,g,r:}\dots A(c,r) \Rightarrow A(c,r)}
      }{{}_{c,g,r}\,: A(g,r) \to A(c,r), \forall y.G(y), A(g,r), M(r), \forall x.F(x) \Rightarrow A(c,r)}
    }{{}_{c,g,r}\,; \forall y.G(y), A(g,r), M(r), \forall x.F(x) \Rightarrow A(c,r)}
  }{{}_{c,g,r}\,; \neg A(c,r), \forall y.G(y), A(g,r), M(r), \forall x.F(x) \Rightarrow \bot}
}{
  \dfrac{{}_{c,g,r}\,; M(r) \to \neg A(c,r), \forall x.F(x), \forall y.G(y), A(g,r), M(r) \Rightarrow \bot}{{}_{c,g,}\,; \forall x.F(x), \forall y.G(y), A(g,r), M(r) \Rightarrow \bot}
}
$$

Nota: l'unica funzione del termine $\mathbf{a}_0$ è di testimoniare che l'universo non è vuoto. Ma qui abbiamo individui denotati dalle costanti c, g, r dunque possiamo omettere il termine $\mathbf{a}_0$ nel sequente.

3.(iii). **Che cosa dimostra** la derivazione ottenuta dell'esercizio 3.(ii)?

2 punti

Risposta: Se assumiamo le proposizioni $\forall x.F(x), \forall y.G(y), P, Q$ otteniamo una contraddizione; cioè la loro congiunzione è *contraddittoria*.

3.(iv). **Si formalizzi nel calcolo dei predicati** l'espressione seguente:

A: *"C'è qualcuno tale che se lui non risolve il problema allora nessuno lo risolve."*

Soluzione: $\exists x.(\neg P(x) \to \forall y.\neg P(y))$

4 punti

3.(v). **Si applichi la procedura semantic tableaux** all'espressione $\Rightarrow A$, dove A è la formula ottenuta nella parte 3 (iv).

Nota: **un esercizio analogo è stato fatto in classe**.

4 punti

3.(vi). **La formula** A è *valida* oppure *falsificabile*?

Soluzione: **valida**.

2 punti