Soluzioni dell'Esercizio 2

Filosofia della Scienza - Gianluigi Bellin

November 5, 2013

Assegnato il 31 ottobre 2013. Soluzione 5 novembre 2013.

1. Esercizi di traduzione. Espressioni funzionali.
(Si scriva la chiave di lettura).

1. *Ogni essere umano ha esattamente un padre.*

Chiave: **Predicati:** $U(x)$ = "*x è un essere umano*" $P(y, z)$ = "*y è padre di z*" "$u = v$" = "*u è uguale a v*".

$$\forall x.U(x) \to \exists y. \underbrace{P(y,x)}_{\text{esistenza}} \wedge \underbrace{\big(\forall z.P(z,x) \to y = z\big)}_{\text{unicità}} \tag{1}$$

Assumiamo che nell'universo di discorso l'espressione 1 sia vera. Allora possiamo estendere il linguaggio con una funzione $p(x)$ = "*padre di x*", con l'*assioma definitorio*

$$\forall x.\forall z.P(z,x) \leftrightarrow z = p(x) \tag{2}$$

2. *Il padre di Giulietta non ama Romeo.*

Chiave: **Predicati:** $A(x, y)$ = "*x ama y*"
Funzioni e costanti: $p(z)$ = "*il padre di z*" g = "*Giulietta*" r = "*Romeo*".

$$\neg A(p(g), r).$$

1. *Il re d'Italia è basso di statura.*

Chiave: **Predicati:** $R(x)$ = "*x è re d'Italia*" $B(y)$ = "*y è basso di statura*"

$$\exists y. \underbrace{R(y)}_{\text{esistenza}} \wedge \underbrace{\big(\forall z.R(z) \to y = z\big)}_{\text{unicità}}$$

1. *Ogni numero reale positivo x ammette esattamente una soluzione positiva y dell'equazione $x = y \cdot y$. Questo numero y si chiama la radice quadrata di x.*

Chiave: **Predicati:** $\mathbb{R}^+(x)$ = "*x è un numero reale positivo*" $u = v$ = "*u è uguale a v*". **Funzioni:** $x \cdot y$ = "x moltiplicato y".

$$\forall x.\mathbb{R}^+(x) \to \exists y. \underbrace{\mathbb{R}^+(y) \wedge y \cdot y = x}_{\text{esistenza}} \wedge \underbrace{\big(\forall z.\mathbb{R}^+(z) \wedge z \cdot z = x \to y = z\big)}_{\text{unicità}} \tag{3}$$

Assumiamo che nell'universo di discorso l'espressione 3 sia vera. Allora possiamo estendere il linguaggio con una funzione $\sqrt{x}$ con l'*assioma definitorio*

$$\forall x.\forall y.y \cdot y = x \leftrightarrow y = \sqrt{x} \tag{4}$$

1. *La radice quadrata di un numero reale positivo x è minore di x.*

Chiave: **Predicati:** $\mathbb{R}^+(x)$ = "*x è un numero reale positivo*" $u = v$ = "*u è uguale a v*" $u < v$ = "*u è minore di v*.

Funzioni: $x \cdot y$ = "x moltiplicato y" $\sqrt{x}$ = "*la radice quadrata di x*".

$$\forall x.\mathbb{R}^+(x) \to \sqrt{x} < x.$$

Nota: l'enunciato 5 è falso; per $0 < x \leq 1$ abbiamo $\sqrt{x} \geq x$.

2. Procedura semantic-tableaux - Calcolo dei sequenti. *Si applichi la procedura per decidere se i sequenti* (1)−(9) *sono validi nel calcolo proposizionale e quindi hanno una* prova *nel* **Calcolo dei Sequenti**. *Se un sequente non è valido, si indichino le valutazioni che lo falsificano.*

2. $$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)$$

4. $$\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

5. $$A \vee (A \wedge B) \Rightarrow A \wedge (A \vee B)$$

Esercizio 2.

$$\neg\,\mathrm{R}\;\dfrac{\wedge\,\mathrm{L}\;\dfrac{\vee\,\mathrm{L}\;\dfrac{\neg\,\mathrm{L}\;\dfrac{\overline{A, B \Rightarrow A}}{\neg A, A, B \Rightarrow} \qquad \neg\,\mathrm{L}\;\dfrac{\overline{A, B \Rightarrow B}}{\neg B, A, B \Rightarrow}}{\neg A \vee \neg B, A, B \Rightarrow}}{\neg A \vee \neg B, A \wedge B \Rightarrow}}{(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \wedge B)}$$

Esercizio 4.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{A \Rightarrow A}}{\Rightarrow A, \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathcal{V}_1}{B \Rightarrow A}}{\Rightarrow A, \neg B}}{\Rightarrow A, \neg A \wedge \neg B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathcal{V}_2}{A \Rightarrow B}}{\Rightarrow B, \neg A} \qquad \dfrac{\overline{B \Rightarrow B}}{\Rightarrow B, \neg B}}{\Rightarrow B, \neg A \wedge \neg B}}{\Rightarrow A \wedge B, \neg A \wedge \neg B}}{\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg A \wedge \neg B}$$

Poniamo $\mathcal{V}_1(B) = v$, $\mathcal{V}_1(A) = f$ allora

$$\mathcal{V}_1(A \wedge B) = \mathcal{V}_1(A) \wedge \mathcal{V}_1(B) = f \wedge v = f$$

e dunque $\mathcal{V}_1(\neg(A \wedge B)) = v$. D'altra parte

$$\mathcal{V}_1(\neg A \wedge \neg B) = \mathcal{V}_1(\neg A) \wedge \mathcal{V}_1(\neg B) = v \wedge f = f,$$

dunque l $\mathcal{V}_1$ falsifica il sequente (4). Similmente per la $\mathcal{V}_2$.

Esercizio 5.

$$\vee\,\mathrm{L}\;\dfrac{\wedge\,\mathrm{R}\;\dfrac{\overline{A \Rightarrow A} \qquad \vee\,\mathrm{R}\;\dfrac{\overline{A \Rightarrow A, B}}{A \Rightarrow A \vee B}}{A \Rightarrow A \wedge (A \vee B)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{A, B \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\overline{A, B \Rightarrow A, B}}{A, B \Rightarrow A \vee B}\;\vee\,\mathrm{R}}{A, B \Rightarrow A \wedge (A \vee B)}\;\wedge\,\mathrm{R}}{A \wedge B \Rightarrow A \wedge (A \vee B)}\;\wedge\,\mathrm{L}}{A \vee (A \wedge B) \Rightarrow A \wedge (A \vee B)}$$