Logica dei Predicati: Calcolo dei Sequenti

Gianluigi Bellin

November 29, 2011

1 Semantic Tableaux per il calcolo dei predicati

Estendiamo la procedura *"semantic tableaux"* al calcolo dei predicati. Nel caso proposizionale la procedura termina sempre, producendo un albero in cui tutti i sequenti sono validi, oppure una valutazione $\mathcal{V}$ che falsifica il sequente. Nell'estensione al primo ordine, la procedura potrebbe non terminare: non sarà più possibile, dato un sequente S, *decidere* in un tempo finito se S è valido oppure se c'è un modello che lo falsifica. Tuttavia, se la procedura non termina, ci sarà un ramo aperto infinito: a questo ramo infinito corrisponde un modello. Per quanto nei casi che considereremo sarà piuttosto evidente se l'albero è chiuso o aperto, *in generale il riconoscimento che si produrrà un ramo infinito e la costruzione del modello corrispondente ad esso non può essere affidata ad una macchina ideale.* Questo è un risultato profondo che segue dalla teoria della computazione: non esiste una macchina ideale, anche dotata di un nastro illimitato su cui leggere e scrivere, che possa decidere in un tempo finito se un sequente arbitrario del calcolo dei predicati è valido o falsificabile.

Definizione. (sequente valido, falsificabile). Consideriamo un linguaggio $\mathcal{L} = (\mathbf{Pred}, \mathbf{Const})$ *senza simboli di funzione.* Abbiamo visto cosa è una *interpretazione* $\mathcal{M}$ per il linguaggio $\mathcal{L}$: è un dominio D dotato di una relazione $P^n_M(x_1, \ldots, x_n)$ per ogni simbolo di predicato n-ario P^n in **Pred** e di un individuo $c_\mathcal{M} \in D$per ogni costante c in **Const**.

Diciamo che un sequente $S = A_1, \ldots, A_m \Rightarrow C_1, \ldots, C_n$ è *valido*, se *per ogni interpretazione* $\mathcal{M}$ ed ogni assegnazione σ di oggetti del dominio alle variabili,

- $\mathcal{M} \not\models A_i[\sigma]$ per qualche $i \leq m$ oppure
- $\mathcal{M} \models C_j[\sigma]$ per qualche $j \leq n$.

Un sequente che non è valido è *falsificabile* cioè, *per qualche interpretazione* $\mathcal{M}$ e qualche assegnazione σ

- $\mathcal{M} \models A_i[\sigma]$ per ogni $i \leq m$ ed inoltre
- $\mathcal{M} \not\models C_j[\sigma]$ per ogni $j \leq n$.

Teorema. *La seguente procedura "semantic tableaux" per la il calcolo dei predicati classico del primo ordine, dato un sequente S nel linguaggio $\mathcal{L}$,*

1. *ritorna un albero di sequenti finito τ con $\Rightarrow S$ alla radice tale che ogni sequente in τ è valido, se S è valido;*
2. *oppure termina con almeno un ramo aperto;*
3. *oppure non termina ed ha un ramo aperto infinito.*

Nei casi 2 e 3, ad ogni ramo aperto corrisponde una interpretazione $\mathcal{M}$ del linguaggio $\mathcal{L}$ che rende falso il sequente S.

Le regole del calcolo dei sequenti, che usiamo anche nella procedura *semantic tableaux* sono le seguenti. Qui usiamo il simbolo $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ per una sequenza di n termini.

regole logiche

assiomi

$$\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma, A \Rightarrow \Delta, A$$

$$\frac{\bar{\mathbf{a}}:\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ \neg\ \mathrm{R} \qquad \frac{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\bar{\mathbf{a}};\ \neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \neg\ \mathrm{L}$$

$$\frac{\bar{\mathbf{a}}\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow\ \Delta, A \wedge B}\ \wedge\ \mathrm{R} \qquad \frac{\bar{\mathbf{a}};\ A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\bar{\mathbf{a}};\ A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \wedge\ \mathrm{L}$$

$$\frac{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}\ \to \mathrm{R} \qquad \frac{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \bar{\mathbf{a}};\ B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\bar{\mathbf{a}};\ A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \to \mathrm{L}$$

$$\frac{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow\ \Delta, A \vee B}\ \vee\ \mathrm{R} \qquad \frac{\bar{\mathbf{a}};\ A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \bar{\mathbf{a}};\ B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\bar{\mathbf{a}};\ A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \vee\ \mathrm{L}$$

$$\frac{\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{a}_{n+1};\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A(a_{n+1})}{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow\ \Delta, \forall x.A(x)}\ \forall\ \mathrm{R} \qquad \frac{\bar{\mathbf{a}};\ A(\mathbf{a}_0), \ldots, A(\mathbf{a}_n), \forall x.A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\bar{\mathbf{a}};\ \forall x.A(x), \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \forall\ \mathrm{L}$$

$$\frac{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow \Delta, A(\mathbf{a}_0), \ldots, A(\mathbf{a}_n), \exists x.A(x)}{\bar{\mathbf{a}};\ \Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x.A(x)}\ \exists\ \mathrm{R} \qquad \frac{\bar{\mathbf{a}}, \mathbf{a}_{n+1};\ A(a_{n+1}), \Gamma \Rightarrow \Delta}{\bar{\mathbf{a}};\ \exists x.A(x), \Gamma \Rightarrow\ \Delta}\ \exists\ \mathrm{R}$$

Nelle regole $\forall$ R ed $\exists$ L la notazione sottintende che il termine $\mathbf{a}_{n+1}$ non compare nel sequente-premessa.

Esempi. Assumiamo che x non compaia in C.

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1;\ A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow C, A(\mathbf{a}_0) \to C, \exists x.(A(x) \to C), A(\mathbf{a}_1)}
{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1;\ \Rightarrow A(\mathbf{a}_0) \to C, A(\mathbf{a}_1) \to C, \exists x.(A(x) \to C), A(\mathbf{a}_1)}\ \to \mathrm{R}
}{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1;\ \Rightarrow \exists x.(A(x) \to C), A(\mathbf{a}_1)}\ \exists\ \mathrm{R}
}{\mathbf{a}_0;\ \Rightarrow \exists x.(A(x) \to C), \forall x.A(x)}\ \forall\ \mathrm{R}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\mathbf{a}_0;\ C, A(\mathbf{a}_0) \Rightarrow C, \exists x.(A(x) \to C)}
{\mathbf{a}_0;\ C \Rightarrow A(\mathbf{a}_0) \to C, \exists x.(A(x) \to C)}\ \to \mathrm{R}
}{\mathbf{a}_0;\ C \Rightarrow \exists x.(A(x) \to C)}\ \to \mathrm{R}
}{\mathbf{a}_0;\ (\forall x.A(x)) \to C \Rightarrow \exists x.(A(x) \to C)}\ \exists\ \mathrm{R}
$$

Nell'esempio segente scriviamo $\bar{\mathbf{a}}$ per $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$.

ramo aperto

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\bar{\mathbf{a}};\ A(\mathbf{a}_1) \Rightarrow A(\mathbf{a}_1) \ldots \qquad \bar{\mathbf{a}};\ A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_2), B(\mathbf{a}_1), A(\mathbf{a}_0) \wedge B(\mathbf{a}_0), \ldots}
{\bar{\mathbf{a}};\ A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_2), A(\mathbf{a}_i) \wedge B(\mathbf{a}_i), \ldots, \text{ i} = 0,\ 1}\ \wedge\ \mathrm{R}
\qquad \bar{\mathbf{a}};\ B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow B(\mathbf{a}_2) \ldots
}{\bar{\mathbf{a}};\ A(\mathbf{a}_1), B(\mathbf{a}_2) \Rightarrow A(\mathbf{a}_i) \wedge B(\mathbf{a}_i), \exists z.(A(z) \wedge B(z)), \text{ i} = 0,\ 1,\ 2}\ \wedge\ \mathrm{R}
}{\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1;\ A(\mathbf{a}_1), \exists y.B(y) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \exists\ \mathrm{L}
}{\mathbf{a}_0;\ \exists x.A(x), \exists y.B(y) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \exists\ \mathrm{L}
}{\mathbf{a}_0;\ (\exists x.A(x)) \wedge (\exists y.B(y)) \Rightarrow \exists z.(A(z) \wedge B(z))}\ \wedge\ \mathrm{L}
$$

Possiamo vedere chiaramente che, pur applicando ancora una volta la regola $\wedge$ R nel ramo centrale dell'albero, otteniamo dei rami aperti. D'altra parte, in questo esempio l'albero è finito, perché non sono possibili altre inferenze che introducano nuovi termini. Possiamo allora costruire il nostro modello che falsifica tutti i sequenti nel ramo aperto, quindi anche la conclusione.

Poniamo $\mathbf{M} = (D, A_{\mathcal{M}}, B_{\mathcal{M}})$ dove

1. $D = \{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$
2. $A_{\mathcal{M}} = \{\mathbf{a}_1\}$
3. $B_{\mathcal{M}} = \{\mathbf{a}_2\}$

• La scelta 1 del dominio D è dovuta al fatto che $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ sono i termini introdotti nel ramo aperto.
• La scelta 2 per $A_{\mathcal{M}}$ è motivata dal fatto che $A(\mathbf{a}_1)$ compare nell'antecedente dei sequenti del ramo aperto, dunque deve essere vera nel modello, mentre $A(\mathbf{a}_2)$ compare nel succedente e quindi deve essere falsa nel modello.
• Similmente, la scelta 3 per $B_{\mathcal{M}}$ è motivata dal fatto che $B(\mathbf{a}_2)$ compare nell'antecedente dei sequenti del ramo aperto, mentre $B(\mathbf{a}_1)$ compare nel succedente.
• Infine $A(\mathbf{a}_0) \wedge B(\mathbf{a}_0)$ compare nel succedente e possiamo decidere che $\mathbf{a}_0$ non appartenga né all'interpretazione di A né a quella di B.

Ci resta da verificare che il sequente è falsificato dal modello $\mathcal{M}$. *Procediamo informalmente*[1]*!*

(i) Poiché $\mathbf{a}_1 \in A_{\mathcal{M}}$, abbiamo $\mathcal{M} \models A(\mathbf{a}_1)$, dunque $\mathcal{M} \models \exists x.A(x)$;

(ii) poiché $\mathbf{a}_2 \in B_{\mathcal{M}}$, abbiamo $\mathcal{M} \models B(\mathbf{a}_2)$, dunque $\mathcal{M} \models \exists y.B(y)$;

- da (i) e (ii) segue che $\mathcal{M} \models (\exists x.A(x)) \wedge (\exists y.B(y))$, dunque l'antecedente del sequente è verificato da $\mathcal{M}$.

[1]Qui stiamo considerando i temini $\mathbf{a}_i$ come nomi di loro stessi, invece di introdurre le assegnazioni σ.

- Tuttavia $\mathcal{M} \not\models (A(\mathbf{a}_0) \wedge B(\mathbf{a}_0))$, perché $\mathbf{a}_0$ non appartiene all'interpretazione di A e di B;

  $\mathcal{M} \not\models A(\mathbf{a}_1) \wedge B(\mathbf{a}_1)$, perché $\mathbf{a}_1 \notin B_{\mathcal{M}}$

  $\mathcal{M} \not\models A(\mathbf{a}_2) \wedge B(\mathbf{a}_2)$ perché $\mathbf{a}_2 \notin A_{\mathcal{M}}$

  Dunque **non vale** $\mathcal{M} \models \exists x.(A(x) \wedge B(x))$ e dunque il modello $\mathcal{M}$ falsifica il succedente del sequente.

Concludiamo che il sequente conclusione è falsificato dal modello $\mathcal{M}$, come richiesto.

D'altra parte consideriamo una interpretazione intuitiva dei predicati dove $A(x)$ significa *x è virtuoso* e $B(x)$ significa *x è vizioso.* Allora basta considerare un insieme di persone dove, per esempio $\mathbf{a}_1$ = *Francesco* è virtuoso, $\mathbf{a}_2$ = *Caligola* è vizioso e $\mathbf{a}_0$ *Mario Rossi* non è ne vizioso nè virtuoso. Verifichiamo immediatamente che in questa interpretazione *esiste un virtuoso* ed *esiste un vizioso* ma *non esiste un individuo che sia al tempo stesso virtuoso e vizioso.*