# Logica - Filosofia 2010 - Compito 2

Gianluigi Bellin

December 7, 2010

## 1 Domanda 1

Una funzione $f : A \to B$ si dice *suriettiva* se *per ogni* $b \in B$ *esiste* un $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Dato un insieme $S$, chiamiamo $\wp(S)$ l'insieme dei sottoinsiemi di $S$, cioè $\wp(S) = \{X | X \subseteq S\}$.

(i) Si dimostri la seguente proposizione:

**Teorema di Cantor.** *Per ogni insieme $A$, non vi è biiezione tra $A$ e $\wp(A)$.*

*Suggerimento:* Sia $f : A \to \wp(A)$ una funzione. Consideriamo l'insieme

$$D = \{x \in A | x \notin f(x)\}$$

e supponiamo che esista $d \in A$ tale che $D = f(d)$. Vale $d \in D$ oppure $d \notin D$? Deriva una contraddizione in entrambe i casi, e concludi che $f$ non può essere suriettiva, quindi nemmeno biiettiva.

*4 punti*

(ii) Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se per ogni $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ vale $f(a_1) \neq f(a_2)$. Si definisca una funzione iniettiva $f : A \to \wp(A)$.

*2 punti*

(iii) Dati due insiemi $A$ e $B$ diciamo che $A$ ha *cardinalità minore di* $B$ se esiste una funzione iniettiva $f : A \to B$ ma nessuna funzione $g : A \to B$ è biiettiva. Esiste un insieme di cardinalità massima?

*2 punti*

## 2 Punti fissi

Un elemento $x \in A$ è un *punto fisso* di una funzione $f : A \to A$ se $f(x) = x$. Buona parte delle funzioni non ha punti fissi, come la funzione successore $s(n) = n + 1$ o la funzione $g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ tale che $g(x) = 1 - x$.

Ogni computazione nel lambda calcolo consiste di riscritture di termini della forma seguente:

$$(\lambda x.t)u \rightsquigarrow t[u/x]$$

dove $t[u/x]$ è il risultato della sostituzione di $u$ per ogni occorrenza di $x$ in $t$.

Supponiamo che $\lambda x.t$ computi la funzione $f(x)$ ed $u$ rappresenti l'argomento $n$. *Se la computazione di* $(\lambda x.t)u$ *termina in un lambda termine* $r$, allora $f(n)$ è rappresentato da $r$; altrimenti diciamo che $f$ è una *funzione parziale*, che non è definita per l'argomento $n$.

(i) Sia $M$ un lambda termine qualsiasi. Definiamo $\Omega := \lambda x.M(x(x))$. Dimostra (in un passo di riduzione) che $\Omega(\Omega)$ è un punto fisso di $M$.

*2 punti*

(ii) Tutti i lambda termini hanno un punto fisso, ma non tutte le funzioni. Come è possibile?

*2 punti*

(iii) **Domanda bonus.** Il paradosso del barbiere di Borgo Roma può essere visto come un teorema di punto fisso. Dato l'insieme $A$ dei residenti maschi di Borgo Roma, sia $b$ il barbiere di Borgo Roma. Definiamo una funzione $F : A \times A \to \{0, 1\}$ ponendo

$$F(a, b) = 1 \quad \text{se } a \text{ rade } b, \quad F(m, n) = 0 \quad \text{altrimenti.}$$

Sia $G : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ definita da $G(x) = 1 - x$ e sia $H(x) = G(F(x, x))$. Allora $H(a) = 1$ se e solo se $a$ non si rade da sè, ed inoltre $D = \{a \in A | H(a) = 1\}$ è l'insieme di tutti e soli coloro che non si radono da sè e dunque che sono rasi da $b$.

L'ipotesi da refutare è che $b$ sia un residente maschio di Borgo Roma e dunque che la funzione $F$ sia definita per $F(b, x)$: in questo caso infatti, $D = \{a \in A|F(b, a) = 1\}$. **Si dimostri (in due passi) che $F(d, d)$ è un punto fisso di $G$.**

Questo conclude la prova, perché ovviamente la funzione $G$ non ha punti fissi.

*5 punti*

# 3 Calcolo combinatorio

Definiamo $\binom{n}{k}$ come il coefficiente di $a^k b^{n-k}$ nell'espansione di $(a + b)^n$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n-k)}$$

(i) Dimostrare che

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

*Suggerimento:* Questa è l'idea alla base del Triangolo di Tartaglia: $(a + b)^n = a \cdot (a + b)^{n-1} + b \cdot (a + b)^{n-1}$. In particolare, $a^k b^{n-k} = a \cdot a^{k-1} b^{n-k}$ oppure $a^k b^{n-k} = b \cdot a^k b^{n-k-1}$.

*4 punti*

(ii) Dimostra per induzione su $n$ che $\binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$.

*4 punti*