Logica proposizionale Lezione 2

Gianluigi Bellin

October 20, 2011

1 Validità e Soddisfacibilità

Sia **Atomi** un insieme di lettere proposizionali e sia $\mathcal{V}$: **Atomi** $\rightarrow \{V, F\}$ una assegnazione di valori di verità alle lettere in **Atomi**. Sia una formula A construita a partire dalle lettere in **Atomi**.
Diciamo che $\mathcal{V}$ *soddisfa* A se $\mathcal{V}(A) = V$ e che $\mathcal{V}$ *falsifica* A se $\mathcal{V}(A) = F$.

Definizione (soddisfacibilità, validità, conseguenza valida).

- Diciamo che A è *soddisfacibile* se esiste $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{V}(A) = V$.
- Diciamo che A è *falsificabile* se esiste $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{V}(A) = F$.
- Diciamo che A è *valida* se per ogni $\mathcal{V}$ abbiamo $\mathcal{V}(A) = V$.
- Diciamo che A è *contraddittoria* se per ogni $\mathcal{V}$ abbiamo $\mathcal{V}(A) = F$.

Inoltre sia $\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ un insieme di formule. Diciamo che A è *conseguenza valida* di Γ e scriviamo $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A$ se per ogni $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{V}$ soddisfa tutte le formula A_i in Γ vale che $\mathcal{V}(A) = T$.
Diciamo che due formule A e B sono *semanticamente equivalenti* se $A \models B$ e $B \models A$.

1.1 Esempi.

1. Consideriamo i seguenti enunciati:

> A_1 = *se stasera ho la macchina e la mia compagna esce con me allora vado al cinema.*
>
> A_2 = *stasera ho la macchina.*
>
> C = *stasera vado al cinema.*

Domanda: *Vale* $A_1, A_2 \models C$, *cioè* C *è conseguenza valida di* A_1 *e* A_2*?*

La formula A_1 si può formalizzare come $p \wedge q \rightarrow r$ dove

$p =$ *stasera ho la macchina.*

$q =$ *stasera la mia compagna esce con me.*

$r =$ *stasera vado al cinema.*

La tavola di verità ha otto righe, corrispondenti alle valutazioni $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_8$:

				A_1 ,	A_2	$\models$	C
	p	q	r	$(p \wedge q) \rightarrow r$	p		r
$\mathcal{V}_1$	V	V	V	$(V\ V\ V)$ **V** V	**V**	OK	**V**
$\mathcal{V}_2$	V	V	F	$(V\ V\ V)$ **F** F	**V**	OK	**F**
$\mathcal{V}_3$	V	F	V	$(V\ F\ F)$ **V** V	**V**	OK	**V**
$\mathcal{V}_4$	V	F	F	$(V\ F\ F)$ **V** F	**V**	**NO**	**F**
$\mathcal{V}_5$	F	V	V	$(F\ F\ V)$ **V** V	**F**	OK	**V**
$\mathcal{V}_6$	F	V	F	$(F\ F\ V)$ **V** F	**F**	OK	**F**
$\mathcal{V}_7$	F	F	V	$(F\ F\ F)$ **V** V	**F**	OK	**V**
$\mathcal{V}_8$	F	F	F	$(F\ F\ F)$ **V** F	**F**	OK	**F**

Le valutazioni $\mathcal{V}_5$, $\mathcal{V}_6$, $\mathcal{V}_7$ e $\mathcal{V}_8$ falsificano la formula atomica $A_2 = p$, quindi la condizione per la conseguenza valida è soddisfatta in modo vacuo; similmente valutazione $\mathcal{V}_2$ falsifica l'implicazione $A_1 = (p \wedge q) \rightarrow r$. Le valutazioni $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_3$ soddisfano A_1 ed A_2 ed anche C e dunque la condizione per la conseguenza valida è soddisfatta. Ma la valutazione $\mathcal{V}_4$ soddisfa A_1 ed A_2 ma falsifica C questa valutazione dimostra che C non è conseguenza valida di A_1 ed A_2. [1]

2. Aggiungiamo ora l'ipotesi $A_3 = q$, cioè *stasera la mia compagna esce con me* e domandiamo: *Vale* $A_1, A_2, A_3 \models C$*?*

[1] Questo risultato non è sorprendente: il nostro eroe ha stabilito una regola, la formula A_1, che ha due condizioni p e q, ed una conseguenza r; poi vuole derivare la conclusione r senza essere sicuro che la condizione q sia vera.

Si noti che ora la valutazione $\mathcal{V}_4$ falsifica l'ipotesi A_3 e quindi la condizione per la conseguenza valida è sempre soddisfatta:

				A_1	,		A_2	A_3	$\models$	C
	p	q	r	$(p \wedge q)$	$\to$	r	p	q		r
$\mathcal{V}_1$	V	V	V	$(V\ V\ V)$	**V**	V	**V**	**V**	OK	**V**
$\mathcal{V}_2$	V	V	F	$(V\ V\ V)$	**F**	F	**V**	**V**	OK	**F**
$\mathcal{V}_3$	V	F	V	$(V\ F\ F)$	**V**	V	**V**	**F**	OK	**V**
$\mathcal{V}_4$	V	F	F	$(V\ F\ F)$	**V**	F	**V**	**F**	OK	**F**
$\mathcal{V}_5$	F	V	V	$(F\ F\ V)$	**V**	V	**F**	**V**	OK	**V**
$\mathcal{V}_6$	F	V	F	$(F\ F\ V)$	**V**	F	**F**	**V**	OK	**F**
$\mathcal{V}_7$	F	F	V	$(F\ F\ F)$	**V**	V	**F**	**F**	OK	**V**
$\mathcal{V}_8$	F	F	F	$(F\ F\ F)$	**V**	F	**F**	**F**	OK	**F**

Si noti la somiglianza tra le tavole di verità in **1.** e **2.** e quelle **3.** e **4.**:
Formula 3:

	p	q	r	$((p \wedge q)$	$\to$	r	$\wedge$	$p\ )$	$\to$	r
$\mathcal{V}_1$	V	V	V	$((V\ V\ V)$	V	V	**V**	$V)$	**V**	V
$\mathcal{V}_2$	V	V	F	$((V\ V\ V)$	F	F	**F**	$V)$	**V**	F
$\mathcal{V}_3$	V	F	V	$((V\ F\ F)$	V	V	**V**	$V)$	**V**	V
$\mathcal{V}_4$	V	F	F	$((V\ F\ F)$	V	F	**V**	$V)$	**F**	F
$\mathcal{V}_5$	F	V	V	$((F\ F\ V)$	V	V	**F**	$F)$	**V**	V
$\mathcal{V}_6$	F	V	F	$((F\ F\ V)$	V	F	**F**	$F)$	**V**	F
$\mathcal{V}_7$	F	F	V	$((F\ F\ F)$	V	V	**F**	$F)$	**V**	F
$\mathcal{V}_8$	F	F	F	$((F\ F\ F)$	V	V	**F**	$F)$	**V**	F

Formula 4.

	p	q	r	$((p \wedge q)$	$\to$	r	$\wedge$	$(p$	$\wedge$	$q)\ )$	$\to$	r
$\mathcal{V}_1$	V	V	V	$((V\ V\ V)$	V	V	**V**	$(V$	V	$V))$	**V**	V
$\mathcal{V}_2$	V	V	F	$((V\ V\ V)$	F	F	**F**	$(V$	V	$V))$	**V**	F
$\mathcal{V}_3$	V	F	V	$((V\ F\ F)$	V	V	**F**	$(V$	F	$F))$	**V**	V
$\mathcal{V}_4$	V	F	F	$((V\ F\ F)$	V	F	**F**	$(V$	F	$F))$	**V**	F
$\mathcal{V}_5$	F	V	V	$((F\ F\ V)$	V	V	**F**	$(F$	F	$V))$	**V**	V
$\mathcal{V}_6$	F	V	F	$((F\ F\ V)$	V	F	**F**	$(F$	F	$V))$	**V**	F
$\mathcal{V}_7$	F	F	V	$((F\ F\ F)$	V	V	**F**	$(F$	F	$F))$	**V**	F
$\mathcal{V}_8$	F	F	F	$((F\ F\ F)$	V	V	**F**	$(F$	F	$F))$	**V**	F

La somiglianza tra **2** e **4** risulta dall'applicazione di un teorema generale:

Teorema di Deduzione: *Se* $\Gamma, A \models C$ *allora* $\Gamma \models A \to C$.

1.2 Esercizi.

Esercizio 1. Dimostrare che in ciascuna linea le formule sono semanticamente equivalenti:

(a) A; $\neg\neg A$; $(A \wedge A)$; $(A \vee A)$; $(A \wedge (A \vee B))$; $(A \vee (A \wedge B)$.

(b) $\neg A$; $A \rightarrow (B \wedge \neg B)$.

(c) $\neg(A \vee B)$; $(\neg A \wedge \neg B)$. (*De Morgan*)

(d) $\neg(A \wedge B)$; $(\neg A \vee \neg B)$. (*De Morgan*)

(e) $(A \vee B)$; $(B \vee A)$; $(\neg B \rightarrow A)$; $\neg(\neg A \wedge \neg B)$; $((A \rightarrow B) \rightarrow B)$.

(f) $(A \wedge B)$; $(B \wedge A)$; $\neg(A \rightarrow \neg B)$; $\neg(\neg A \vee \neg B)$.

(g) $(A \rightarrow B)$; $(\neg A \vee B)$; $\neg(A \wedge \neg B)$; $(\neg B \rightarrow \neg A)$.

(h) $(A \rightarrow \neg B)$; $(B \rightarrow \neg A)$. (*contrapposizione*)

(i) $(A \leftrightarrow B) =_{def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$.

(j) $\neg(A \leftrightarrow B)$; $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$; $((\neg A) \leftrightarrow B)$.

(k) $(A \wedge (B \vee C))$; $((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$. (*distributività*)

(l) $(A \vee (B \wedge C))$; $((A \vee B) \wedge (A \vee C))$. (*distributività*)

(m) $((A \vee B) \rightarrow C)$; $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$.

(n) $(A \rightarrow (B \wedge C))$; $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$.

(o) $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$; $((A \wedge B) \rightarrow C)$.

Esercizio 2. Verificare se i seguenti sequenti sono falsificabili:

(a) $(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow (C \vee (B \wedge A))$.

(b) $(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow (C \vee (B \wedge A))$.

(c) $(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow (C \wedge (B \vee A))$.

(d) $(A \rightarrow (B \vee C)) \Rightarrow ((A \rightarrow B) \vee C)$.

(e) $((A \rightarrow B) \vee C)) \Rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$.

(f) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \Rightarrow A$.