

# Logica dei Predicati: Semantica e Dimostrazioni

Gianluigi Bellin

October 17, 2013

# 1. Sintassi del calcolo dei predi- cati.

**Sintassi.** Un linguaggio del calcolo dei predi-  
cati  $\mathcal{L} = (\mathbf{Pred}, \mathbf{Const})$  consiste di

(1) un insieme di lettere predicative **Pred**  
 $= \{P_1^{n_1}, \dots, P_m^{n_m}\}$ , dove  $P_i^{n_i}$  è un simbolo  
di predicato  $n_i$ -ario (una espressione “non-  
saturata”, con  $n_i$  “buchi”);

(2) un insieme di simboli di costante **Const**  
 $= \{c_1, \dots, c_h\}$

(3) un insieme infinito di variabili **Var**:  $\{v_0, v_1, \dots, v_i, \dots\}$  denotate con  $x, y, x_i$ .

**Termini.** I *termini* del linguaggio sono definiti  
dalla grammatica

$$t ::= x \mid c$$

Dunque un termine è una costante  $c$  (*termine chiuso*) o una variabile  $x$  (*variabile libera*).

**Formule.** Le *formule* del linguaggio sono definite dalla grammatica

$$A, B := P^n(t_1, \dots, t_n) \mid \neg A \mid A \wedge B \mid \\ \mid A \vee B \mid A \rightarrow B \mid \forall x.A \mid \exists x.A$$

**Varianti.** Se  $z$  è una variabile che non compare in  $A(x)$  e  $A(z)$  risulta da  $A(x)$  sostituendo dovunque  $x$  con  $z$ , allora le formule  $\forall x.A(x)$  e  $\forall z.A(z)$  [oppure  $\exists x.A(x)$  e  $\exists z.A(z)$ ] sono *varianti* una dell'altra ed hanno lo stesso significato.

L'operazione di sostituzione di un termine  $t$  per  $x$  si denota con  $A[t/x]$ ; nell'effettuare una sostituzione se  $t$  è una variabile  $y$  bisogna fare attenzione che non vi siano quantificatori  $\forall y$  o  $\exists y$  in  $A$  che possano "catturare" la variabile  $y$  quando è sostituita per  $x$ .

Se una sottoformula  $B$  di  $A$  inizia con un tale quantificatore  $Qy$  si sostituisce  $B$  con una variante, che inizia con il quantificatore  $Qz$  dove  $z$  non compare in  $A$ .

## 2. Semantica.

Una *interpretazione*  $\mathcal{M}$  del linguaggio  $\mathcal{L}$  consiste di un dominio non vuoto  $D$  e di una assegnazione  $(\ )_{\mathcal{M}}$

- assegniamo ad ogni simbolo di predicato  $n$ -ario  $P^n$  in **Pred** una relazione  $n$ -aria  $P_{\mathcal{M}}^n$  [dati  $d_1, \dots, d_n \in D$ ,  $P_{\mathcal{M}}^n(d_1, \dots, d_n) = \mathbf{vero}$  o  $\mathbf{falso}$ ];
- ad ogni simbolo di costante  $c$  in **Const** un elemento  $c_{\mathcal{M}} \in D$ .

Come interpretiamo le *formule atomiche*? Se  $P(c_1, \dots, c_n)$  è una formula chiusa, possiamo dire che

- $P(c_1, \dots, c_n)$  è vera in  $\mathcal{M}$ , in simboli,  $\mathcal{M} \models P(c_1, \dots, c_n)$  se e solo se  $P_{\mathcal{M}}(c_{1\mathcal{M}}, \dots, c_{n\mathcal{M}}) = \mathbf{vero}$  [cioè quando gli elementi che interpretano  $c_1, \dots, c_n$  appartengono alla relazione che interpreta  $P$ ].

Ma se  $P(x)$  contiene  $x$  libera, una interpretazione non basta per interpretare  $P(x)$  perché non sappiamo a quale elemento di  $D$  possa riferirsi la variabile  $x$ .

Se  $\sigma : \mathbf{Var} \rightarrow D$  è una assegnazione di elementi di  $D$  alle variabili, allora diciamo che *una interpretazione  $\mathcal{M}$  insieme ad una assegnazione  $\sigma$  soddisfa  $P(x_1, \dots, x_n)$  quando  $P_{\mathcal{M}}(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)) = \mathbf{vero}$ . in questo caso scriviamo  $\mathcal{M}, \sigma \models P$ .*

Data una interpretazione  $\mathcal{M}$  ed una assegnazione  $\sigma$  definiamo *soddisfacibilità* così:

1.  $\mathcal{M}, \sigma \models P(c_1, \dots, c_n, x_1, \dots, x_n)$  se e solo se  $P_{\mathcal{M}}(c_{1\mathcal{M}}, \dots, c_{n\mathcal{M}}, \sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m)) = \text{vero}$ ;
2.  $\mathcal{M}, \sigma \models (\neg A)$  se e solo se **non**  $\mathcal{M}, \sigma \models A$ ;
3.  $\mathcal{M}, \sigma \models (A \wedge B)$  se e solo se  $\mathcal{M}, \sigma \models A$  e  $\mathcal{M}, \sigma \models B$ ;
4.  $\mathcal{M}, \sigma \models (A \vee B)$  se e solo se  $\mathcal{M}, \sigma \models A$  **oppure**  $\mathcal{M}, \sigma \models B$  (e similmente per l'implicazione);
5.  $\mathcal{M}, \sigma \models (\exists x.A(x))$  se e solo se **esiste** un  $d \in D$  tale che per l'assegnazione  $\sigma'$  che assegna  $\sigma'(x) = d$  e coincide con  $\sigma$  sulle altre variabili vale  $\mathcal{M}, \sigma' \models A(x)$ ;
6.  $\mathcal{M}, \sigma \models (\forall x.A(x))$  se e solo se **per ogni**  $d \in D$ , per l'assegnazione  $\sigma'$  che assegna  $\sigma'(x) = d$  e coincide con  $\sigma$  sulle altre variabili vale  $\mathcal{M}, \sigma' \models A(x)$ .

Una formula  $A$  si dice **soddisfacibile** [**falsificabile**] se esiste una interpretazione  $\mathcal{M}$  ed una assegnazione  $\sigma$  tale che  $\mathcal{M}, \sigma \models A$  [ $\mathcal{M}, \sigma \not\models A$ ].

$A$  è **valida** [**contraddittoria**] se per ogni interpretazione  $\mathcal{M}$  ed ogni assegnazione  $\sigma$  vale  $\mathcal{M}, \sigma \models A$  [ $\mathcal{M}, \sigma \not\models A$ ].

**3. Esempio.** Formalizziamo le seguenti proposizioni.

Ci serve un linguaggio  $\mathcal{L} = (M^1, A^2, c, g, r)$   
 un predicato  $M(x) = x \text{ è un Montecchi}$ , un predicato  
 $A(x, y) = x \text{ ama } y$ , tre nomi,  $c = \text{Capuleti padre}$ ,  $g =$   
 $\text{Giulietta}$ ,  $r = \text{Romeo}$ .

1. *Nessuno dei Montecchi è amato da Capuleti.*

$$\forall x.M(x) \rightarrow \neg A(c, x)$$

2. *Capuleti ama tutti coloro che sono amati da Giulietta.*

$$\forall y.(A(g, y) \rightarrow A(c, y))$$

3. *Giulietta ama Romeo.*

$$A(g, r)$$

4. *Romeo è un Montecchi.*

$$M(r).$$

Dimostriamo che da (1) - (4) segue una contraddizione:

$$\frac{M(r) \quad \frac{\forall x.M(x) \rightarrow \neg A(c, x)}{M(r) \rightarrow \neg A(c, r)}}{\neg A(c, r)} \quad \frac{A(g, r) \quad \frac{\forall y.(A(g, y) \rightarrow A(c, y))}{(A(g, r) \rightarrow A(c, r))}}{A(c, r)}$$

contraddizione!

Consideriamo le seguenti proposizioni (1+), (2)-(4)

1+. *Qualcuno dei Montecchi non è amato da Capuleti.*

$$\exists x.M(x) \wedge \neg A(c, x)$$

2. *Capuleti ama tutti coloro che sono amati da Giulietta.*

$$\forall y.(A(g, y) \rightarrow A(c, y))$$

3. *Giulietta ama Romeo.*

$$A(g, r)$$

4. *Romeo è un Montecchi.*

$$M(r).$$

Costruiamo una interpretazione che le rende vere:

$$\mathcal{M} = (D, M_{\mathcal{M}}, A_{\mathcal{M}}, c_{\mathcal{M}}, g_{\mathcal{M}}, r_{\mathcal{M}})$$

$$\text{dove } D = \{c1, c2, m1, m2\},$$

$$M_{\mathcal{M}} = \{m1, m2\}, A_{\mathcal{M}} = \{\langle c2, m1 \rangle, \langle c1, m1 \rangle\},$$

$$c_{\mathcal{M}} = c1, g_{\mathcal{M}} = c2, r_{\mathcal{M}} = m1.$$

**1+** vera perché  $M_{\mathcal{M}}(m2) \wedge \neg A_{\mathcal{M}}(c1, m2)$  è vera;

**2.** è vera perché  $A_{\mathcal{M}}(c2, m1) \rightarrow A_{\mathcal{M}}(c1, m1) = \text{vero}$  perchè  $A(c1, m1) = \text{vero}$  [il caso di Romeo!]; in tutti gli altri casi  $d \in D, d \neq m1$  abbiamo  $A_{\mathcal{M}}(c2, d) \rightarrow A_{\mathcal{M}}(c1, d) = \text{vero}$  perché  $A_{\mathcal{M}}(c2, d) = \text{falso.}$ ;

**3.**  $A_{\mathcal{M}}(c2, r1) = \text{vero}$  e **4.**  $M_{\mathcal{M}}(m1) = \text{vero}$ .

**Aiutarsi con un grafico!**