Logica: argomentazioni, giudizi, proposizioni.

Gianluigi Bellin

October 10, 2012

1. Logica delle argomentazioni.
Logica proposizionale

	Formalmente
1.	
Se Gianni viene alla festa, allora Maria viene.	$A \to B$
Gianni viene alla festa.	A
Maria viene alla festa.	B
2.	
O Gianni viene alla festa o Maria viene.	$A \vee B$
Se Gianni viene allora Carla viene.	$A \to C$
Se Maria viene allora Dario viene.	$B \to D$
O Carla o Dario vengono alla festa.	$C \vee D$
3.	
Gianni e Dario vengono alla festa.	$A \wedge D$
Se Gianni viene allora Sara viene.	$A \to S$
Se Dario viene allora Sara non viene.	$D \to \neg S$
il presidente Obama viene alla festa.	O

Logica predicativa

1.

Tutte le balene sono mammiferi.	$\forall x.B(x) \rightarrow M(x)$
Moby Dick è una balena.	$B(m)$
Moby Dick è un mammifero.	$M(m)$

2.

Tutti i pesci sono mammiferi.	$\forall x.P(x) \rightarrow M(x)$
Moby Dick è un pesce.	$P(m)$
Moby Dick è un mammifero.	$M(m)$

3. (*sillogismo*)

Tutti i cavalli sono mammiferi.	$\forall x.C(x) \rightarrow M(x)$
Tutti i mammiferi sono vertebrati.	$\forall x.M(x) \rightarrow V(x)$
Tutti i cavalli sono vertebrati.	$\forall x.C(x) \rightarrow V(x)$

3*.

Tutti i cavalli sono mammiferi.	$\forall x.C(x) \rightarrow M(x)$
Tutti i cavalli sono vertebrati.	$\forall x.C(x) \rightarrow V(x)$
Tutti i mammiferi sono vertebrati.	$\forall x.M(x) \rightarrow V(x)$

4.

Tutti gli unicorni sono cavalli.	$\forall x.U(x) \rightarrow C(x)$
Tutti i cavalli sono vertebrati.	$\forall x.C(x) \rightarrow V(x)$
Tutti gli unicorni sono vertebrati.	$\forall x.U(x) \rightarrow V(x)$

In ogni argomento ogni linea è un *giudizio assertivo*. Ciò che viene asserito è una *proposizione*.
In ogni argomento giudizi sopra la riga sono le *premesse* quello sotto la riga è la *conclusione*.

Quali requisiti per gli argomenti validi?
Devono preservare la *correttezza dei giudizi*: se tutte le premesse sono corrette, anche la conclusione è corretta.

Risposta classica: *correttezza dei giudizi* = *verità delle proposizioni asserite*.
Preservazone della verità: *Se le premesse sono vere, allora la conclusione è vera.*

Logica proposizionale.

Dato un insieme **Atomi** di proposizioni atomiche $p_1, p_2, \ldots$ l'insieme delle formule della logica proposizionale è dato dalla grammatica

$$A, B \ := \ p \mid \neg A \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid A \rightarrow B \mid A \leftrightarrow B$$

Per la preservazione della verità non importa il significato delle proposizioni atomiche; basta assumere che
• le proposizioni atomiche siano **vere** o **false** (e nient'altro);
• i *connettivi* logici *"non"* ($\neg$), *"e"* ($\wedge$), *"o"* ($\vee$), *"implica"* ($\rightarrow$)) *"se e solo se"* ($\leftrightarrow$) siano *vero-funzionali*, cioè siano *funzioni totali* che assegnino un valore di verità **vero** o **falso** alla formula composta quando applicate del valori di verit'à delle formule componenti.

Tabelle di verità per i *connettivi logici*:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
v	v	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	f	f
f	v	v	f	v	v	f
f	f	v	f	f	v	v

Esercizio: Si scrivano tutte le 16 possibili funzioni binarie di valori di verità .

Soddisfacibilità, validità, conseguenza logica

Dato un insieme **Atomi** di proposizioni atomiche $p_1, p_2, \ldots$, una *valutazione* $\mathcal{V} : \mathbf{Atomi} \to \{v, f\}$ è una funzione che assegna un valore di verità **vero** o **falso** a ciascuna formula atomica.
Ogni valutazione $\mathcal{V}$ assegna un unico valore di verità alle formule composte, che viene determiano con il metodo delle tavole di verità

- Una formula A è **soddisfacibile** se esiste una valutazione $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{V}(A) = v$
- Una formula A è **falsificabile** se esiste una valutazione $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{V}(A) = f$
- Una formula A è **valida** se per ogni valutazione $\mathcal{V}$ $\mathcal{V}(A) = v$
- Una formula A è **contradditoria** se per ogni valutazione $\mathcal{V}$ $\mathcal{V}(A) = f$.
- una formula C è **conseguenza logica** di un insieme di formule $A_1, \ldots, A_n$ (in simboli $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow C$), se per ogni valutazione $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{V}(A_1) = \ldots = \mathcal{V}(A_n) = v$ vale che $\mathcal{V}(C) = v$.

Verifichiamo che gli argomenti **1** e **3** sono validi.

$$A \to B, A \Rightarrow B$$

Se A e $A \to B$ sono veri per $\mathcal{V}$, per le tavole di verià dell'implicazione anche B è vera per $\mathcal{V}$.

$$A \wedge D, A \to S, D \to \neg S \Rightarrow O$$

Supponiamo che A e D siano veri per $\mathcal{V}$; se $\mathcal{V}(S) = v$ allora $\mathcal{V}(D \to \neg S) = f$; se $\mathcal{V}(S) = f$ allora $\mathcal{V}(A \to S) = f$. Dunque non esiste $\mathcal{V}$ che renda vere tutte le premesse dell'argomento, e quindi O è conseguenza logica delle premesse (*ex falso, quodlibet*).

Verità e paradossi.

Ma cosa comporta dire che una proposizione A è vera?

• *Veritas adaequatio rei et intellectus est* (Tommaso d'Aquino, 1225-74, dopo Isaac ben Solomon, tra 855 e 955)

Qualunque proprietà possiamo attribuire al concetto di verità, vale la *"de-virgolettizzazione"* (*dis-quotationality*):

• *la proposizione A è vera se e solo se A*

• *la proposizione "la neve è bianca" è vera se e solo se la neve è bianca*.

Consideriamo la proposizione
(*) *la proposizione (*) è falsa*.

Allora
- *la proposizione (*) è vera*
  se e solo se [*per definizione di* (*)]
- *la prop. "la proposizione (*) è falsa" è vera*
  se e solo se [*de-virgolettizzazione*]
- *la proposizione (*) è falsa*.

Contraddizione!

Soluzione classica: (Tarski) il concetto di verità può essere definito solo *relativamente ad un linguaggio*.
Distinzione tra linguaggio oggetto e metalinguaggio:
"la neve è bianca" appartiene al linguaggio oggetto;
"A è vera" appartiene al metalinguaggio.
La proposizione (*) viola la distinzione tra linguaggio oggetto e metalinguaggio.

Gaps nei valori di verità: le valutazioni sono *funzioni parziali*, indefinite per certe proposizioni.

Logiche fuzzy: valori di verità come "stati epistemici", "valori di probabilità" da 0 a 1.
Valutazioni $w : \mathbf{Atomi} \to [0, 1]$
$w(\neg A) = 1 - w(A)$;
$w(A \wedge B) = min\{w(A), w(B)\}$ (cong. debole);
$w(A \vee B) = max\{w(A), w(B)\}$ (disg. debole);
$w(A \to B) = min\{1, 1 - w(A) + w(B)\}$; etc.

Logica predicativa.

Dato un **universo di discorso** D (gli oggetti di cui si parla),
• i *nomi* (Carla, Gianni, Dario, ecc) sono interpretati da elementi di D;
• un *predicato atomico* $P(x_1, \ldots, x_n)$ è interpretato da una funzione $f_P : \underbrace{D \times \ldots \times D}_{n\ volte} \rightarrow \{v, f\}$, che assegna ad lista di elementi $\langle d_1, \ldots, d_n \rangle$ in D un valore di verità **vero** o **falso**.
[Per semplicità, supponendo di avere un nome $\overline{d}$ per ogni elemento $d \in D$; possiamo che $P(\overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_n)$ è **vero in** D se e solo se $f_P(d_1, \ldots, d_n) = v$.]
• i connettivi proposizionali sono funzioni di valori di verità come sopra;
• i *quantificatori "per ogni x"* ($\forall x$) ed *"esiste x"* ($\exists x$) assegnano un valore di verità nel modo seguente:

- $\forall x.P(x)$ è **vero in** D se per ogni d in D, $P(d)$ è vero in D;

- $\exists x.P(x)$ è **vero in** D se per qualche d in D, $P(d)$ è vero in D.

Esempi.

1. *Carla ama Gianni.* $A(c, g)$

dove c = Carla, g = Gianni, $A(x, y)$ = x ama y.

2. *Carla è amata da tutti.* $\forall x.A(x, c)$

3. *Tutti amano qualcuno.* $\forall x.\exists y.A(x, y)$

4. *Se qualcuno è amato da tutti, allora tutti amano qualcuno.* $(\exists y.\forall x.A(x, y) \rightarrow (\forall x.\exists y.A(x, y))$