Filosofia della Scienza 2010-11
Soluzioni Compito 2

Gianluigi Bellin

10 gennaio 2011

1 Domanda 1 - Teorema di Cantor

Una funzione $f : A \to B$ si dice *iniettiva* se per ogni $x, y \in A$, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.
Una funzione $f : A \to B$ si dice *suriettiva* se per ogni $z \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = z$.
Una funzione $f : A \to B$ si dice *bi-iettiva* se è iniettiva e suriettiva.
Si dice che due insiemi A e B hanno *la stessa cardinalità* se esiste una bi-iezione $f : A \to B$.
Scriviamo $|A|$ per la la cardinalità di A (cioè per la classe di equivalenza contenente gli tutti gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di A - vedi Lezione 7).

(i). **Si dimostri** il teorema di Cantor: *Per ogni insieme A non esiste bi-iezione tra A e l'insieme $\wp(A)$ dei sottoinsiemi di A.*

Nota. Si può dimostrare che *se A è un insieme finito* allora $|\wp(A)| = 2^{|A|}$ e poiché per tutti i numeri naturali n vale che $2^n > n$, in questo caso il Teorema di Cantor è immediato. Ma se A è infinito, come possiamo sapere che non c'è bi-iezione tra A e $\wp(A)$ (o tra $|A|$ e $2^{|A|}$)? Dopotutto abbiamo visto delle cose ben strane a proposito degli insiemi infiniti (come la funzione zig-zag di Cantor)! È appunto il Teorema di Cantor a dare la risposta negativa.

Prova. Data $f : A \to \wp(A)$, definiamo

$$D = \{x \in A \mid x \notin f(x)\} \tag{1}$$

da cui segue che

$$x \in D \qquad \text{se e solo se} \qquad x \notin f(x) \tag{2}$$

Supponiamo che f sia suriettiva e dunque esista un $d \in A$ tale che $D = f(d)$.

- Supponiamo $d \in D$, dunque per la definizione di D [o per l'equazione (2)] otteniamo $d \notin f(d)$; ma $f(d) = D$, dunque $d \notin D$, e questa è una contraddizione.

- Sipponiamo allora che $d \notin D$, allora poiché $D = f(d)$ abbiamo $d \notin f(d)$ e dunque per definizione di D [o per l'equazione (2)] otteniamo $d \in D$, e questa è una contraddizione.

In entrambe i casi abbiamo una contraddizione, dunque f non può essere suriettiva (e quindi neppure bi-iettiva). Questo conclude la prova del Teorema di Cantor.

(ii) **Si definisca** una funzione iniettiva $f : A \to \wp(A)$.
Sia f definita da $x \mapsto \{x\}$ per ogni $x \in A$. Se $f(x) = f(y)$ allora $\{x\} = \{y\}$ e dunque $x = y$, perché due insiemi sono lo stesso insieme se e solo se hanno gli stessi elementi.

(iii) Supponiamo esista un insieme A di cardinalità massima. Considera $\wp(A)$: allora per (ii) esiste una funzione iniettiva $f : A \to \wp(A)$, ma per la parte (i) nessuna funzione $f : A \to \wp(A)$ può essere suriettiva, e dunque la cardinalità di A è minore di quella di $\wp(A)$ ($|A| < |\wp(A)|$) ed A non era di cardinalità massima.

2 Punti fissi

Un elemento $x \in A$ è un *punto fisso* di una funzione $f : A \to A$ se $f(x) = x$. Buona parte delle funzioni aritmetiche non ha punto fisso, come la funzione successore $s : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $s(n) = n + 1$ o la funzione $g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ tale che $g(x) = 1 - x$.
I *lambda termini* sono espressioni simboliche definite dalla grammatica

$$t, u \quad := \quad x \mid t(u) \mid \lambda x.t$$

Ogni computazione nel lambda calcolo consiste di riscritture di termini secondo la regola seguente:

$$(\lambda x.t)u \rightsquigarrow t[u/x] \tag{3}$$

Data una funzione $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ supponiamo che $\lambda x.t$ computi la funzione $f(x)$ ed u rappresenti l'argomento $n \in \mathbf{N}$. *Se la computazione di* $(\lambda x.t)u$ *termina in un lambda termine* r, allora r rappresenta il numero naturale $f(n)$; se la computazione non termina, diciamo che f è una *funzione parziale* e che f *non è definita* per l'argomento n,

(i) Sia M un lambda termine qualsiasi. Definiamo $\Omega := \lambda x.M(x(x))$.
Dimostro che $\Omega(\Omega)$ è un punto fisso per M attraverso la seguente riscrittura

$$\Omega(\Omega) = (\lambda x.M(x(x)))\,(\Omega) \rightsquigarrow M(x(x))[\Omega/x] = M(\Omega(\Omega)) \tag{4}$$

dove ho applicato una riduzione (3) nel passo centrale.

(ii) Tutti i lambda termini hanno un punto fisso, ma molte funzioni non ne hanno alcuno. **Come è possibile?**

Risposta: I lambda termini rappresentano *algoritmi* (programmi) *per computare le funzioni*, ma *non sono* funzioni.
Consideriamo la funzione successore $s : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Se $\lambda x.t$ è un lambda termine che rappresenta s ed u un lambda termine che rappresenta il numero naturale n, allora la computazione $(\lambda x.t)u \rightsquigarrow t[u/x]$ termina ed il lambda termine $t[u/x]$ rappresenta il numero naturale $n+1$.
Ma nel lambda calcolo qualsiasi termine si applica a qualsiasi altro termine: per esempio poniamo $M := (\lambda x.t)$ nella definizione di Ω. Allora

$$\Omega(\Omega) \rightsquigarrow M(\Omega(\Omega)) \rightsquigarrow M(M(\Omega(\Omega))) \rightsquigarrow \ldots$$

Ma $\Omega(\Omega)$ *non rappresenta un numero naturale!* Infatti se $\Omega(\Omega)$ rappresentasse il numero naturale n, questo vorrebbe dire che

$$n = n+1 = n+2 = \ldots \qquad \textit{un'assurdità!}$$

Possiamo quindi concludere che se un termine $\lambda x.t$ rappresenta la funzione successore, allora $\lambda x.t$ la computa correttamente solo quando viene applicato ad un termine u che rappresenta un numeri naturali. Possiamo anche dire che la funzione successore non è definita quando applicate ad oggetti come $\Omega(\Omega)$ oppure … alle nuvole!

Domanda Bonus. Sia A l'insieme dei residenti maschi di Borgo Roma. Definiamo una funzione $F : A \times A \to \{0,1\}$ ponendo

$$F(a,b) = 1 \quad \text{se } a \text{ rade } b, \qquad F(a,b) = 0 \quad \text{altrimenti.}$$

Sia $G : \{0,1\} \to \{0,1\}$ la funzione definita da $G(x) = 1-x$ e sia $H(x) = G(F(x,x))$. Allora $H(a) = 1$ se e solo se a non si rade da sè. ed inoltre

$$D = \{a \in A \mid H(a) = 1\} \tag{5}$$

l'insieme di coloro che non si radono da sè, che dunque (per ipotesi) sono rasi da b. Supponiamo che b sia un residente maschio di Borgo Roma, cioè $b \in A$. Allora

$$D = \{a \in A \mid F(b,a) = 1\}. \tag{6}$$

Si dimostri (in due passi) che $F(b,b)$ è un punto fisso di G.

Dimostrazione:

$$\begin{array}{llll} F(b,b)=1 & \text{se e solo se } H(b)=1 & \text{per (5) e (6);} \\ & \text{se e solo se } G(F(b,b))=1 & \text{per definizione di } H. \end{array}$$

Dunque $G(F(b,b)) = F(b,b)$ ed $F(b,b)$ è un punto fisso di G, impossibile. Concludiamo che b non è un residente maschio di Borgo Roma.

3 Calcolo Combinatorio

Nota. Lo scopo di questo esercizio è di *derivare* le proprietà della funzione $\binom{n}{k}$ dalla definizione; dobbiamo supporre di *non sapere* il valore di $\binom{n}{k}$. Allora per evitare confusioni, scriviamo C_n^k al posto di $\binom{n}{k}$, come nel testo di Gnedenko e Khinchin.

Definiamo C_n^k come *il coefficiente di* $a^k b^{n-k}$ *nell'espansione di* $(a+b)^n$. Dunque

$$(a+b)^n = a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^1 a b^{n-1} + b^n.$$

Dato un termine qualsiasi della somma $a^k b^{n-k}$, ci domandiamo: quanti termini di questo tipo ci sono, cioè *qual è il valore del coefficiente* C_n^k *nell'espansione di* $(a+b)^n$*?*

(i) Il primo passo per rispondere a questa domanda è **dimostrare** che

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Osserviamo intanto che

$$(a+b)^n = (a+b) \cdot (a+b)^{n-1} = a \cdot (a+b)^{n-1} + (a+b)^{n-1} \cdot b \tag{7}$$

L'osservazione cruciale è che

$$a^k b^{n-k} = a \cdot (a^{k-1} b^{n-k}) = (a^k b^{n-k-1}) \cdot b \tag{8}$$

ed inoltre che

$$a^{k-1} b^{n-k} = a^{k-1} b^{(n-1)-(k-1)} \qquad \text{ed inoltre} \qquad a^k b^{n-k-1} = a^k b^{(n-1)-k} \tag{9}$$

Dunque tutti i termini $a^k b^{n-k}$ nell'espansione di $(a+b)^n$ sono ottenuti moltiplicando per a i termini $a^{k-1} b^{(n-1)-(k-1)}$ nell'espansione di $(a+b)^{n-1}$ oppure moltiplicando per b i termini $a^k b^{(n-1)-k}$ nell'espansione di $(a+b)^{n-1}$.

In altri termini abbiamo dimostrato che $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ usando (7), (8) e (9). Questa è l'idea del Triangolo di Tartaglia.

Ma a cosa serve ave dimostrato la parte la (i)? Abbiamo mostrato che i valori dei coefficienti per $(a+b)^n$ si possono ottenere dai valori dei coefficienti per $(a+b)^{n-1}$; il punto di una prova per induzione è che dato $C_1^1 = 1$, se conoscendo i valori di C_{n-1}^k per tutti i $k \leq n-1$ ottengo i valori di C_n^k per tutti i $k \leq n$, allora posso computare C_n^k per ogni n e $k \leq n$. Ora facciamo precisamente questo, ricavando una formula per C_n^k.

$$
\begin{aligned}
C_1^1 &= \frac{1!}{(1-1)!1!} = \frac{1!}{0!1!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1; \\
C_n^k &= C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k && \text{per la parte (i);} \\
&= \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} \\
& && \text{per ipotesi induttiva;} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-1-k+1)}{k!} \\
& && \text{espandendo e semplificando;} \\
&= k \cdot \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} + (n-k) \cdot \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \\
&= (k+n-k) \cdot \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \\
& && \text{per la proprietà distributiva;} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}
\end{aligned}
$$

Dunque per induzione abbiamo dimostrato che $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$, e ritrovato il familiare valore di $\dbinom{n}{k}$.