Baby Temporal Logic 2009-2010

Gianluigi Bellin

26 gennaio 2010

1 Un frammento della logica temporale

Si consideri il linguaggio della logica temporale **LTL** ristretto alla grammatica

$$A \quad := \quad p \mid \neg p \mid \bot \mid \top \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \circ A \mid \Box A \mid \Diamond A$$

Si considerino le seguenti regole di **LTL**.

assioma $\Rightarrow p, \neg p, \Delta$

assioma $\Rightarrow \top, \Delta$

$$\frac{\Rightarrow \Gamma, \phi \qquad \Rightarrow \Gamma, \psi}{\Rightarrow \Gamma, \phi \wedge \psi} \wedge \qquad \frac{\Rightarrow \Gamma, \phi, \psi}{\Rightarrow \Gamma, \phi \vee \psi} \vee$$

$$\frac{\Rightarrow \phi_1, \ldots, \phi_n}{\Rightarrow \pm p_1, \ldots \pm p_m, \circ\phi_1, \ldots, \circ\phi_n} \mathit{next}$$

$$\frac{\Rightarrow \Gamma, \phi \vee \circ\Diamond\phi}{\Rightarrow \Gamma, \Diamond\phi} \Diamond\text{-exp} \qquad \frac{\Rightarrow \Gamma, \phi \wedge \circ\Box\phi}{\Rightarrow \Gamma, \Box\phi} \Box\text{-exp}$$

Le regole indicate sono corrette rispetto alla semantica della logica **LTL** del tempo futuro lineare e si applicano in una procedura semantic tableaux nel modo familiare, anche se tale procedura non è completa (occorrono altre regole per $\Box$).

1.0.1 Esempio 1

La procedura applicata al sequente $\Rightarrow \Diamond p$ genera il seguente ramo infinito ciclico:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Rightarrow \Diamond p}}{\Rightarrow p, \circ\Diamond p}\ \mathit{next}}{\dfrac{\Rightarrow p \vee \circ\Diamond p}{\Rightarrow \Diamond p}\ \Diamond\text{-espansione}}\ \vee
$$

Un modello $\mathcal{M}$ che falsifica $\Rightarrow \Diamond p$ è dato da $(\mathbf{N}, \Vdash)$ tale che $(\mathbf{N}, n) \Vdash \neg p$ per tutti gli $n \in \mathbf{N}$.

1.0.2 Esempio 2

La procedura applicata al sequente $\Rightarrow \Box p$ genera un ramo aperto ed un ramo infinito ciclico:

$$
\dfrac{\dfrac{\Rightarrow p \qquad \dfrac{\Rightarrow \Box p}{\Rightarrow \circ\Box p}\ \mathit{next}}{\Rightarrow p \wedge \Box p}\ \wedge}{\Rightarrow \Box p}\ \Box\text{-espansione}
$$

Modelli $\mathcal{M} = (\mathbf{N}, \Vdash)$ che falsificano $\Rightarrow \Box p$ sono dati da qualsiasi assegnazione $\Vdash$ tale che $(\mathbf{N}, n) \Vdash \neg p$ per qualche $n \in \mathbf{N}$.

1.0.3 Esempio 3

Il sequente $\Rightarrow \Diamond \circ p, \Diamond \circ \neg p$ è valido.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textbf{assioma}}{\Rightarrow p, \Diamond \circ p, \neg p, \Diamond \circ \neg p}}{\Rightarrow \circ p, \circ\Diamond \circ p, \circ\neg p, \circ\Diamond\neg p}\ \mathit{next}}{\Rightarrow \circ p \vee \circ\Diamond \circ p, \circ\neg p \vee \circ\Diamond\neg p}\ \vee \text{ 2 volte}}{\Rightarrow \Diamond \circ p, \Diamond \circ \neg p}\ \Diamond\text{-esp 2 volte}
$$