Logica Computazionale 2009-2010

Gianluigi Bellin

23 luglio 2010

1 Domanda 1 - Logica proposizionale

Si considerino i sequenti S_1 ed S_2

$$S_1 : \qquad (p \to q) \to r \Rightarrow p \to (q \to r)$$

$$S_2 : \qquad (p \to q) \to (p \to r) \Rightarrow q \to r.$$

(i) Si applichi la procedura semantic tableaux per verificare se S_1 ed S_2 sono validi o falsificabili nella logica classica. Se un sequente è falsificabile, si definisca una assegnazione di valori di verità $\mathcal{V}$: **Atomi** $\to \{V, F\}$ e si dimostri che $\mathcal{V}$ lo falsifica.

punti 2

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$q, p \Rightarrow r, q$}
\RightLabel{$\to$-R}
\UnaryInfC{$q \Rightarrow r, p \to q$}
\AxiomC{ramo aperto}
\noLine
\UnaryInfC{$q \Rightarrow r, p$}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$r, q \Rightarrow r$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$p \to r, q \Rightarrow r$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$(p \to q) \to (p \to r), q \Rightarrow r$}
\RightLabel{$\to$-R}
\UnaryInfC{$(p \to q) \to (p \to r) \Rightarrow q \to r$}
\end{prooftree}
$$

Dal ramo aperto otteniamo la valutazione $\mathcal{V}(p) = F = \mathcal{V}(r)$ e $\mathcal{V}(q) = V$, dalla quale otteniamo

$(p \to q)$	$\to$	$(p \to r)$	$\Rightarrow$	$q \to r$
$(F \to V)$	$\to$	$(F \to F)$	$\Rightarrow$	$V \to F$
V	$\to$	V	$\Rightarrow$	F
	V		$\Rightarrow$	F
			F	

(ii) Si trovi una prova (cioè una deduzione senza assunzioni aperte) nel sistema di deduzione naturale $\mathbf{NJ}^{\rightarrow}$ di

$$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r).$$

punti 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(1)}{(p \rightarrow q) \rightarrow r} \qquad \dfrac{\overset{(2)}{q}}{p \rightarrow q}\,{\rightarrow}\text{-I}}{r}\,{\rightarrow}\text{-E}}{q \rightarrow r}\,{\rightarrow}\text{-I}\ (2)}{((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow r)}\,{\rightarrow}\text{-I}\ (1)$$

Nota. L'applicazione della regola $\rightarrow$-I con premessa q e conclusione $p \rightarrow q$ scarica una *classe vuota di assunzione della forma* p: nessuna assunzione della forma p compare sopra la premessa q che è essa stessa l'assunzione (2).

(iii) Si costruisca una derivazione senza taglio nel calcolo dei sequenti intuizionistico $\mathbf{LJ}^{\rightarrow}$ del sequente S_3

$$S_3 : \qquad (p \rightarrow q) \rightarrow r \Rightarrow q \rightarrow r$$

punti 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{q}, p \Rightarrow \mathbf{q}}}{q \Rightarrow p \rightarrow q}\,{\rightarrow}\text{-R} \qquad \dfrac{}{\mathbf{r}, q \Rightarrow \mathbf{r}}}{(p \rightarrow q) \rightarrow r, q \Rightarrow r}\,{\rightarrow}\text{-L}}{(p \rightarrow q) \rightarrow r \Rightarrow q \rightarrow r}\,{\rightarrow}\text{-R}$$

Nota: La derivazione è intuizionista: possiamo omettere la formula r dai succedenti dei sequenti del ramo sinistro, perché la chiusura di quel ramo è determinata dalla formula q.

2 Domanda 2 - Calcolo dei predicati

Si considerino i sequenti S_4 ed S_5:

$$S_4: \qquad \Rightarrow \forall x.\big((\exists y.T(x,y)) \vee (\forall z.\neg T(x,z))\big)$$

$$S_5: \qquad \Rightarrow \big(\forall x.\exists y.T(x,y)) \vee (\forall x.\forall z.\neg T(x,z))\big).$$

Si applichi la procedura semantic tableaux per verificare se S_4 ed S_5 sono validi o falsificabili nel calcolo dei predicati per la logica classica.

punti 2

$$
\begin{array}{cl}
\cline{1-1}
a_0, a_1, a_2;\ \mathbf{T(a_1, a_2)} \Rightarrow T(a_1, a_0), T(a_1, a_1), \mathbf{T(a_1, a_2)}, \exists y.T(a_1, y) & \\
\cline{1-1}
a_0, a_1, a_2;\ T(a_1, a_2) \Rightarrow \exists y.T(a_1, y) & \neg\text{-R} \\
\cline{1-1}
a_0, a_1, a_2;\ \Rightarrow \exists y.T(a_1, y), \neg T(a_1, a_2) & \neg\text{-R} \\
\cline{1-1}
a_0, a_1;\ \Rightarrow \exists y.T(a_1, y), \forall z.\neg T(a_1, z) & \forall\text{-R} \\
\cline{1-1}
a_0, a_1;\ \Rightarrow (\exists y.T(a_1, y)) \vee (\forall z.\neg T(a_1, z)) & \vee\text{-R} \\
\cline{1-1}
a_0;\ \Rightarrow \forall x.\big((\exists y.T(x, y)) \vee (\forall z.\neg T(x, z))\big) & \forall\text{-R}
\end{array}
$$

Nota: La foglia del ramo è un assioma per la presenza dell'atomo $T(a_1, a_2)$ nell'antecedente e nel conseguente.

$$
\begin{array}{cl}
\cline{1-1}
a_0, a_1, a_2;\ T(a_2, a_3) \Rightarrow T(a_1, a_0), T(a_1, a_1), T(a_1, a_2), T(a_1, a_3), \exists y.T(a_1, y) & \\
\cline{1-1}
a_0, a_1, a_2;\ T(a_2, a_3) \Rightarrow \exists y.T(a_1, y) & \exists\text{-R} \\
\cline{1-1}
a_0, a_1, a_2, a_3;\ \Rightarrow \exists y.T(a_1, y), \neg T(a_2, a_3) & \neg\text{-R} \\
\cline{1-1}
a_0, a_1, a_2;\ \Rightarrow \exists y.T(a_1, y), \forall z.\neg T(a_2, z) & \forall\text{-R} \\
\cline{1-1}
a_0, a_1;\ \Rightarrow \exists y.T(a_1, y), \forall x.\forall z.\neg T(x, z) & \forall\text{-R} \\
\cline{1-1}
a_0;\ \Rightarrow \forall x.\exists y.T(x, y), \forall x.\forall z.\neg T(x, z) & \forall\text{-R} \\
\cline{1-1}
a_0;\ \Rightarrow \big(\forall x.\exists y.T(x, y)\big) \vee \big(\forall x.\forall z.\neg T(x, z)\big) & \vee\text{-R}
\end{array}
$$

Nota: La procedura termina con un ramo aperto. Infatti, non abbiamo più formula con quantificatori universali nel succedente (o esistenziali nell'antecedente) dalla cui analisi possano venire generati altri parametri. Ma tutti gli atomi nel succedente sono diversi da quello nell'antecedente, dunque il sequente è falsificabile. Il contromodello ottenuto dalla procedura è il seguente:

- $\mathcal{M} = (M, T_{\mathcal{M}})$, dove
- $M = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ ed
- $T_{\mathcal{M}} = < a_1, a_2 >$.

Allora

- $\mathcal{M} \models T(a_1, a_2)$ e dunque $\mathcal{M} \not\models \forall z.T(a_1, z)$ e $\mathcal{M} \not\models \forall x.\forall z.T(, z)$.
- $\mathcal{M} \not\models T(a_2, a)$ per $a = a_0, a_1, a_2, a_3$, cioè $\mathcal{M} \not\models \exists y.T(a_2, y)$ e dunque anche $\mathcal{M} \not\models \forall x.\exists y.T(x, y)$

Dunque entrambe i disgiunti della formula in question esono falsificati dal modello $\mathcal{M}$. (La costruzione del contromodello non era richiesta.)

3 Domanda 3 - Logiche modali K e KD

(i) Si considerino i sequenti S_6 ed S_7

$$S_6 : \qquad \Rightarrow \Box(\Diamond p \vee \Box\neg p)$$

$$S_7 : \qquad \Rightarrow \Box(\Diamond p \vee \Diamond\neg p)$$

Si applichi la procedura semantic tableaux per la logica **K** per decidere se S_6 ed S_7 sono validi o falsificabili in **K**. Qualora un sequente sia falsificabile in **K**, si costruisca un Modello di Kripke $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ che lo falsifica.

punti 3

(ii) Nella logica **KD** i sequenti S_6 and S_7 sono validi o falsificabili?

punti 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\mathbf{p \Rightarrow p}}}{p, \neg p \Rightarrow}\,\neg\text{-L}}{\neg p \Rightarrow \neg p}\,\neg\text{-R}}{\Box\neg p \Rightarrow \Box\neg p}\,\mathbf{KR}}{\Rightarrow \Diamond p, \Box\neg p}\,\neg\text{-R } \Diamond \text{ def}}{\Rightarrow \Diamond p \vee \Box\neg p}\,\vee\text{-R}}{\Rightarrow \Box(\Diamond p \vee \Box\neg p)}\,\mathbf{KR}$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\UnaryInfC{$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p}$}
\RightLabel{$\neg$-L}
\UnaryInfC{$p, \neg p \Rightarrow$}
\RightLabel{$\neg$-R}
\UnaryInfC{$\neg p \Rightarrow \neg p$}
\RightLabel{$\neg$-L}
\UnaryInfC{$\neg\neg p, \neg p \Rightarrow$}
\LeftLabel{(!!)}
\RightLabel{$\mathbf{DR}$}
\UnaryInfC{$\Box\neg\neg p, \Box\neg p \Rightarrow$}
\RightLabel{$\neg$-L $\Diamond$ def}
\UnaryInfC{$\Box\neg p \Rightarrow \Diamond\neg p$}
\RightLabel{$\neg$-R $\Diamond$ def}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Diamond p, \Diamond\neg p$}
\RightLabel{$\vee$-R}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Diamond p \vee \Diamond\neg p$}
\RightLabel{$\mathbf{KR}$}
\UnaryInfC{$\Rightarrow \Box(\Diamond p \vee \Diamond\neg p)$}
\end{prooftree}
$$

Nota: La regola modale segnata (!!) è una applicazione della regola **D** propria della logica deontica; **essendoci formule nel succedente** (a destra di $\Rightarrow$), **non è una applicazione corretta della regola KR**. Dunque la procedura per **K** si ferma alla conclusione di quella inferenza ed occorre trovare un contromodello per $\Box\neg\neg p, \Box\neg p \Rightarrow$, cioè un modello di Kripke $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ tale che entrambe le formule nell'antecedente siano vere. Si ricordi infatti che l'interpretazione intesa di quel sequente è $(\Box\neg\neg p \wedge \Box\neg p) \rightarrow \bot$ e dunque se rendiamo vere le due formula nell'antecedente dell'implicazione l'interpretazione intesa del seguente è una formula falsa.

Si consideri la clausola del *forcing* per le formule della forma $\Box X$ in un mondo $w \in W$:

($\Box$) $w \Vdash \Box X$ se e solo se per ogni mondo w', *se* wRw' *allora* $w' \Vdash X$.

Dunque sia w' un mondo possibile in W tale che wRw': allora per definizione di modello di Kripke vale $w' \Vdash p$ oppure $w' \nVdash p$; nel primo caso abbiamo $w \nVdash \Box\neg p$, nel secondo caso $w \nVdash \Box\neg\neg p$. L'unica possibilità per avere sia $w \Vdash \Box\neg\neg p$ sia $w \Vdash \Box\neg p$ è che *nessun mondo* w' *sia accessibile da* w: allora la clausola ($\Box$) b̀analmente vera in entrambe i casi. Dunque un contromodello è $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ dove $W = \{w\}$, $R = \emptyset$ e $\Vdash$ può essere arbitraria.

In conclusione, la logica **K** ammette modelli *ciechi*, che non accedono ad alcun mondo possibile, nei quali ogni formula della forma $\Box X$ è vera. Ma se leggiamo $\Box X$ come "*è giusto che X*" allora certamente non è razionale ammettere che sia giusto sia fare X sia fare la negazione di X; quindi un modello di Kripke che contenga *mondi ciechi* non può essere un modello per la logica **KD**. In altre parole, in un modello per **KD** in qualunque situazione si può vedere un mondo possibile *giusto*, un modo di comportarsi corretto; si noti però che non è realistico assumere *modelli riflessivi* per **KD**:

in particolare non è detto che il mondo reale w_0 sia giusto e dunque in logica deontica non vale $w_0 R w_0$.

4 Un frammento della logica temporale

Si consideri il linguaggio della logica temporale **LTL** ristretto alla grammatica

$$A \quad := \quad p \mid \neg p \mid \ \circ A \mid \Box A$$

Si ricordi che una *interpretazione* di una formula φ della logica **LTL** è una struttura $\mathcal{M} : (\mathbf{N}, \mathcal{V})$ in cui per ogni stato $i \in \mathbf{N}$ e per ogni atomo p, $\mathcal{V}(i,p) = V$ oppure $\mathcal{V}(i,p) = F$, ed inoltre

- $\mathcal{V}(i, \circ p) = V$ se e solo se $\mathcal{V}(i+1, p) = V$;
- $\mathcal{V}(i, \Box\varphi) = V$ se e solo se per ogni $j \geq i$ vale $\mathcal{V}(j, \varphi) = V$; eccetera.

Per esempio, una interpretazione in cui la formula $\varphi = \neg p \wedge \circ\neg p \wedge \circ\circ\Box p$ è vera nello stato 0 si può scrivere come

$\neg p$	$\neg p$	p	$\cdots$	p	$\cdots$

dove i puntini suggeriscono che in tutti gli stati a partire dal terzo la formula p è vera.

4.1 Domanda 4

(ii) È possibile che $\varphi = p \wedge \Box(p \to \circ p)$ e $\psi = \Diamond\neg p$ siano entrambe vere nello stato 0 di un modello lineare? Perché?

punti 2

No, non è possibile. Supponiamo $\mathcal{V}(0,\psi)$, cioè $\mathcal{V}(0, \Diamond\neg p))$: allora esiste un mondo k tale che $\mathcal{V}(k, \neg p)$ e supponiamo che k sia il primo mondo con questa proprietà, cioè $\mathcal{V}(i,p)$ per ogni $i < k$. Si noti che $k > 0$, perché vogliamo $\mathcal{V}(0,\varphi)$ e dunque

$$\mathcal{V}(0,p). \tag{1}$$

Inoltre vale

$$\mathcal{V}(0, \Box(p \to \circ p)), \tag{2}$$

cioè sempre nel modello sarà vero che $p \to \circ p$; in particolare abbiamo

$$\mathcal{V}(0, p \to \circ p). \tag{3}$$

Da (1) e (3) segue

$$\mathcal{V}(0, \circ p), \tag{4}$$

e dunque

$$\mathcal{V}(1, p). \tag{5}$$

Ragionando nello stesso modo otteniamo $\mathcal{V}(i, \circ p)$ per ogni $i < k$, dunque anche per $i = k - 1$. Ma $\mathcal{V}(k - 1, \circ p)$ implica

$$\mathcal{V}(k, p) \tag{6}$$

e questo contraddice la nostra ipotesi. Dunque φ e ψ non possono essere entrambe vere nel mondo 0.