Logica Computazionale 2009-2010

Gianluigi Bellin

7 luglio 2010

1 Domanda 1 - Logica proposizionale

1.1 Procedura Semantic Tableaux classica

Si considerino i sequenti S_1 ed S_2

$$S_1: \qquad \neg p \to q \Rightarrow (p \to q) \to q$$

$$S_2: \qquad (p \to q) \to q \Rightarrow \neg p \to q.$$

(i) Si applichi la procedura semantic tableaux per verificare se S_1 ed S_2 sono validi o falsificabili nella logica classica.

punti 2

1.1.1 Soluzioni

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{p \Rightarrow q, p}}{\Rightarrow q, p, \neg p}\;\neg\text{-R} \qquad \overline{q \Rightarrow q, p}}{\neg p \to q \Rightarrow q, p}\;\to\text{-L} \qquad \overline{\neg p \to q, q \Rightarrow q}}{\neg p \to q, p \to q \Rightarrow q}\;\to\text{-L}}{\neg p \to q \Rightarrow (p \to q) \to q}\;\to\text{-R}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{p \Rightarrow q, p}}{\neg p, p \Rightarrow q}\;\neg\text{-L}}{\neg p \Rightarrow q, p \to q}\;\to\text{-R} \qquad \overline{q, \neg p \Rightarrow q}}{(p \to q) \to q, \neg p \Rightarrow q}\;\to\text{-L}}{(p \to q) \to q \Rightarrow \neg p \to q}\;\to\text{-R}$$

1.2 Deduzione Naturale Intuizionistica

(ii) Si trovi una prova (cioè una deduzione senza assunzioni aperte) nel sistema di deduzione naturale $\mathbf{NJ}^{\to}$ di

$$((p \to \bot) \to q) \to ((p \to q) \to \neg\neg q).$$

punti 2

Suggerimento: *Si assuma anche p e si scarichi questa assunzione derivando $p \to \bot$.*

1.2.1 Soluzione ragionata

Poiché la conclusione della derivazione è una implicazione

$$(\neg p \to q) \to ((p \to q) \to \neg\neg p),$$

il compito si riduce a trovare una prova del conseguente $(p \to q) \to \neg\neg p$ assumendo l'antecedente (1) $\neg p \to q$: questa assunzione (1) verrà scaricata applicando la regola di introduzione dell'implicazione. Ripetendo questo ragionamento, e ricordando che $\neg\neg p =_{def} \neg p \to \bot$, il compito si riduce a trovare una derivazione d tale che

$$\begin{array}{ccc} \overset{(3)}{q \to \bot} & \overset{(1)}{(p \to \bot) \to q} & \overset{(2)}{p \to q} \\ & \vdots & \\ & d & \end{array}$$

$$(1)\ \dfrac{(2)\ \dfrac{(3)\ \dfrac{\bot}{\neg q \to \bot}\ \to\text{-I}}{(p \to q) \to \neg\neg q}\ \to\text{-I}}{((p \to \bot) \to q) \to ((p \to q) \to \neg\neg q)}\ \to\text{-I}$$

Poiché la conclusione di d è la formula atomica $\bot$, nel sistema $\mathbf{NJ}^{\to}$ questa può essere ottenuta solo come conclusione di una regola di eliminazione; e poiché disponiamo dell'assunzione $q \to \bot$, è ragionevole cercare una deduzione d_1 tale che

$$\begin{array}{ccc} \overset{(3)}{q \to \bot} & \overset{(1)}{(p \to \bot) \to q} & \overset{(2)}{p \to q} \\ & \vdots & \\ & d_1 & \end{array}$$

$$\dfrac{\overset{(3)}{q \to \bot} \qquad\qquad q}{\bot}\ \to\text{-E}$$

Di nuovo la conclusione di d_1 è la formula atomica q, quindi nel nostro sistema può essere solo la conclusione di una $\to$-E; ma ci sono *due* assunzioni disponibili, la (1) e la (2), che sono implicazioni con conseguente q: *quale scegliere come premessa maggiore della nostra* $\to$-E ?

Questa è la decisione cruciale nel nostro esercizio: conviene studiarla bene.

- Se scegliamo (2) $p \to q$come premessa maggiore della $\to$-E, la premessa minore sarà p e dovremo trovare una derivazione d_2 dalle stesse assunzioni con conclusione p; ma nessuna assunzione ha conclusione p. Potremmo pensare di *assumere* (4) p, *ma questa assunzione non potrebbe mai essere scaricata al di sotto della nostra inferenza*: non vi è alcuna $\to$-I che possa scaricare (4).

- Se scegliamo (1) $(p \to \bot) \to q$, la premessa minore sarà $(p \to \bot)$ e dovremo trovare una derivazione dalle stesse assunzioni con conclusione $p \to \bot$. Ma questa conclusione non è atomica e può dunque essere conclusione di una regola di introduzione; questo significa che il nostro problema si riduce a trovare una derivazione d_2 di $\bot$ dalle stesse assunzioni *ed in aggiunta anche da* (4) p, dove l'assunzione (4) sarà scaricata dalla $\to$-I con conclusione $p \to \bot$. Questa è dunque la scelta più promettente.

$$\dfrac{\overset{(3)}{q \to \bot} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{(p \to \bot) \to q} \qquad \dfrac{\begin{matrix} \overset{(3)}{q \to \bot} \quad \overset{(2)}{p \to q} \quad \overset{(4)}{p} \\ \vdots \\ d_2 \\ \bot \end{matrix}}{p \to \bot}\ \to\text{-I}}{q}\ \to\text{-E}}{\bot}\ \to\text{-E}$$

Non è difficile a questo punto trovare d_2 e concludere la prova come indicato più sotto.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(3)}{q \to \bot} \qquad \dfrac{\overset{(1)}{(p \to \bot) \to q)} \qquad (4)\,\dfrac{\dfrac{\overset{(3)}{q \to \bot} \qquad \dfrac{\overset{(2)}{p \to q} \qquad \overset{(4)}{p}}{q}\ \to\text{-E}}{\bot}\ \to\text{-E}}{p \to \bot}\ \to\text{-I}}{q}\ \to\text{-E}}{\bot}\ \to\text{-E}}{(3)\ \neg q \to \bot}\ \to\text{-I}}{(2)\ (p \to q) \to \neg\neg q}\ \to\text{-I}}{(1)\ ((p \to \bot) \to q) \to ((p \to q) \to \neg\neg q)}\ \to\text{-I}$$

1.3 Calcolo dei sequenti intuizionistico

(iii) Si costruisca una derivazione senza taglio nel calcolo dei sequenti intuizionistico $\mathbf{LJ}^{\to}$ del sequente S_3

$$S_3: \qquad (p \to \bot) \to q,\ p \to q \Rightarrow \neg\neg q$$

punti 1

Nota. Il calcolo dei sequenti intuizionistico $\mathbf{LJ}^{\to}$ richiede che in ogni sequente della derivazione vi sia *al massimo una* formula a destra di $\Rightarrow$.

1.3.1 Soluzione

$$
\dfrac{
(**)\ \dfrac{
(*)\ \dfrac{
\dfrac{}{\neg q, p \Rightarrow \mathbf{p}}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{q,\ p \Rightarrow q}}{\mathbf{q},\ \neg q, p \Rightarrow}\ \neg\text{-L}
}{\mathbf{p} \to \mathbf{q},\ \neg q, p \Rightarrow}\ \to\text{-L}
}{p \to q,\ \neg q \Rightarrow \mathbf{p} \to \bot}\ \to\text{-R}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{q,\ p \to q,\ \Rightarrow q}}{\mathbf{q},\ p \to q,\ \neg q \Rightarrow}\ \neg\text{-L}
}{(\mathbf{p} \to \bot) \to \mathbf{q},\ p \to q,\ \neg q \Rightarrow}\ \to\text{-L}
$$

$$
\dfrac{(\mathbf{p} \to \bot) \to \mathbf{q},\ p \to q,\ \neg q \Rightarrow}{(p \to \bot) \to q,\ p \to q \Rightarrow \neg\neg q}\ \to\text{-R}
$$

Si noti che la scelta formula introdotta a sinistra nelle inferenze $(*)$ e $(**)$ è analogo alla "decisione cruciale" nell'esercizio precedente. Se nella inferenza $\to$-L più bassa avessimo scelto di introdurre a sinistra la formula $\mathbf{p} \to \mathbf{q}$, allora la formula $\mathbf{p}$ sarebbe comparsa a destra di $\Rightarrow$ in tutti i sequenti del sottoalbero sinistro; quindi avremmo dovuto introdurre $(\mathbf{p} \to \bot) \to \mathbf{q}$ nell'inferenza $\to$-L più alta e nel sequente-premessa sinistro di quella inferenza avremmo dovuto avere *due formule* a destra di $\Rightarrow$.

$$
\dfrac{
(*)\ \dfrac{
(**)\ \dfrac{
(!?!)\ \dfrac{\dfrac{}{\neg q, p \Rightarrow p}}{\neg q \Rightarrow p, \mathbf{p} \to \bot}\ \to\text{-R}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{q \Rightarrow q}}{\mathbf{q},\ \neg q \Rightarrow}\ \neg\text{-L}}{\mathbf{q},\ \neg q \Rightarrow p}\ \textit{weakening}
}{(\mathbf{p} \to \bot) \to \mathbf{q},\ \neg q \Rightarrow \mathbf{p}}\ \to\text{-L}
\qquad
\dfrac{\dfrac{}{q,\ (p \to \bot) \to q,\ \Rightarrow q}}{\mathbf{q},\ (p \to \bot) \to q,\ \neg q \Rightarrow}\ \neg\text{-L}
}{\mathbf{p} \to \mathbf{q},\ (p \to \bot) \to q,\ \neg q \Rightarrow}\ \to\text{-L}
}{(p \to \bot) \to q,\ p \to q \Rightarrow \neg\neg q}\ \to\text{-R}
$$

2 Domanda 2 - Calcolo dei predicati

Si considerino i sequenti S_4 ed S_5:

$$S_4 : \qquad \Rightarrow \forall x.\exists y.\forall z.\big(T(x,y) \vee \neg T(x,z)\big)$$

$$S_5 : \qquad \Rightarrow \big(\forall x.\exists y.T(x,y)\big) \vee \big(\forall x.\forall z.\neg T(x,z)\big).$$

Si applichi la procedura semantic tableaux per verificare se S_4 ed S_5 sono validi o falsificabili nel calcolo dei predicati per la logica classica.

punti 2

2.1 Soluzioni

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a_0,a_1,a_2,a_3;\ T(a_1,a_2) \Rightarrow T(a_1,a_2), \neg T(a_1,a_3), \alpha, \beta, \gamma, T(a_1,a_0)}}{a_0,a_1,a_2,a_3;\ T(a_1,a_2) \Rightarrow T(a_1,a_2) \vee \neg T(a_1,a_3),\ \alpha, \beta, \gamma, T(a_1,a_0)}\ \vee\text{-R}}{a_0,a_1,a_2;\ T(a_1,a_2) \Rightarrow \forall z.T(a_1,a_2) \vee \neg T(a_1,z),\ \forall z.T(a_1,a_3) \vee \neg T(a_1,z), T(a_1,a_0), \alpha, \beta}\ \exists\text{-R}}{a_0,a_1,a_2;\ T(a_1,a_2) \Rightarrow \exists y.\forall z.\big(T(a_1,y) \vee \neg T(a_1,z)\big), T(a_1,a_0), \beta}\ \exists\text{-R}}{a_0,a_1,a_2;\ T(a_1,a_2) \Rightarrow T(a_1,a_0), \alpha, \beta}\ \forall\text{-R}}{a_0,a_1,a_2;\ \Rightarrow T(a_1,a_0), \neg T(a_1,a_2), \alpha, \beta}\ \neg\text{-R}}{a_0,a_1,a_2;\ \Rightarrow T(a_1,a_0) \vee \neg T(a_1,a_2), \alpha, \beta}\ \vee\text{-R}}{a_0,a_1;\ \Rightarrow \forall z.(T(a_1,a_0) \vee \neg T(a_1,z)), \forall z.(T(a_1,a_1) \vee \neg T(a_1,z)), \alpha}\ \forall\text{-R}}{a_0,a_1;\ \Rightarrow \exists y.\forall z.\big(T(a_1,y) \vee \neg T(a_1,z)\big)}\ \exists\text{-R}}{a_0;\ \Rightarrow \forall x.\exists y.\forall z.\big(T(x,y) \vee \neg T(x,z)\big)}\ \forall\text{-R}$$

dove poniamo $\alpha = \exists y.\forall z.\big(T(a_1,y) \vee \neg T(a_1,z)\big)$, $\beta = \forall z.(T(a_1,a_1) \vee \neg T(a_1,z))$ e $\gamma = \forall z.T(a_1,a_3) \vee \neg T(a_1,z)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textit{falsificabile}}{a_0,a_1,a_2,a_3;\ T(a_2,a_3) \Rightarrow T(a_1,a_0), T(a_1,a_1), T(a_1,a_2), T(a_1,a_3), \exists y.T(a_1,y)}}{a_0,a_1,a_2,a_3;\ T(a_2,a_3) \Rightarrow \exists y.T(a_1,y)}\ \neg\text{-R}}{a_0,a_1,a_2,a_3;\ \Rightarrow \neg T(a_2,a_3), \exists y.T(a_1,y)}\ \neg\text{-R}}{a_0,a_1,a_2;\ \Rightarrow \forall z.\neg T(a_2,z), \exists y.T(a_1,y)}\ \forall\text{-R}}{a_0,a_1;\ \Rightarrow \forall x.\forall z.\neg T(x,z), \exists y.T(a_1,y)}\ \forall\text{-R}}{a_0;\ \Rightarrow \forall x.\exists y.T(x,y), \forall x.\forall z.\neg T(x,z)}\ \forall\text{-R}}{a_0;\ \Rightarrow \big(\forall x.\exists y.T(x,y)\big) \vee \big(\forall x.\forall z.\neg T(x,z)\big)}\ \vee\text{-R}$$

La procedura termina: nel sequente-foglia non vi sono quantificatori universali a destra o esistenziali a sinistra, quindi nessun nuovo parametro a_i viene introdotto, e tutte le formule sono atomiche (eccetto $\exists y.T(a_1,y)$, ma tutti i parametri a_i sono già stati sostituiti per y in $\exists y.T(a_1,y)$). [1]

[1] Dunque possiamo costruire una struttura $\mathcal{M} = (M, T_{\mathcal{M}})$ in cui $M = \{a_0,a_1,a_2,a_3\}$

3 Domanda 3 - Logica modale K

(i) Si considerino i sequenti S_6 ed S_7

$$S_6 : \qquad \Rightarrow \Box(\Diamond p \vee \Box\neg p)$$

$$S_7 : \qquad \Rightarrow (\Diamond\Box p) \vee (\Box\Box\neg p)$$

Si applichi la procedura semantic tableaux per la logica **K** per decidere se S_6 ed S_7 sono validi o falsificabili in **K**. Qualora un sequente sia falsificabile in **K**, si costruisca un Modello di Kripke $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ che lo falsifica.

punti 3

3.1 Soluzioni

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \Rightarrow p}}{\Rightarrow p, \neg p}\ \neg\text{-R}}{\Rightarrow \Diamond p, \Box\neg p}\ \mathbf{KR}}{\Rightarrow \Diamond p \vee \Box\neg p}\ \vee\text{-R}}{\Rightarrow \Box(\Diamond p \vee \Box\neg p)}\ \mathbf{KR} \qquad \text{oppure} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Box\neg p \Rightarrow \Box\neg p}}{\Rightarrow \neg\Box\neg p, \Box\neg p}\ \neg\text{-R}}{\Rightarrow \Diamond p, \Box\neg p}\ \text{def. di } \Diamond}{\Rightarrow \Diamond p \vee \Box\neg p}\ \vee\text{-R}}{\Rightarrow \Box(\Diamond p \vee \Box\neg p)}\ \mathbf{KR}$$

con il sistema equivalente dove $\Box$ e $\Diamond$ sono primitivi. — con $\Diamond$ definito come $\Diamond p =_{def} \neg\Box\neg p$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\textit{ramo aperto } w_1}{\Rightarrow p}}{\Rightarrow \Box p}\ \mathbf{KR} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\textit{ramo aperto } w_2}{p \Rightarrow}}{\Rightarrow \neg p}\ \neg\text{-R}}{\Rightarrow \Box\neg p}\ \mathbf{KR}}{\text{“}\textit{ramificazione disgiuntiva}\text{” } w_0}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Rightarrow \Box p, \Box\neg p}{\Rightarrow \Diamond\Box p, \Box\Box\neg p}\ \mathbf{KR}}{\Rightarrow (\Diamond\Box p) \vee (\Box\Box\neg p)}\ \vee\text{-R}$$

nel sistema dove $\Box$ e $\Diamond$ sono primitivi. Poiché l'albero è aperto, costruisco un contromodello $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$, con [2]

e $T_{\mathcal{M}} =< a_2, a_3 >$. Qui per $a = a_0, a_1, a_3$ non esiste $a_j \in M$ tale che $< a, a_j > \in T_{\mathcal{M}}$, dunque $\mathcal{M} \not\models \forall x.\exists y.T(x, y)$; ma abbiamo $< a_2, a_3 > \in T_{\mathcal{M}}$, cioè $\mathcal{M} \models T(a_2, a_3)$, e dunque $\mathcal{M} \not\models \forall x.\forall z.\neg T(x, z)$. La definizione del contromodello non è richiesta per l'esame.

[2] Qui i mondi possibili w_1 e w_2 sono associati ai frammenti di rami senza regole modali sottostanti alle foglie; il mondo w_0 è associato ai sequenti-premessa della “ramificazione

- i mondi possibili $W = \{w, w_0, w_1, w_2\}$,
- la relazione di accessibilità $R = \{< w, w_0 >, < w_0, w_1 >, < w_0, w_2 >\}$,
- una valutazione che soddisfi $w_2 \Vdash p$, arbitraria per altri atomi.

Qui $w_1 \nVdash p$ e $w_0 R w_1$, dunque $w_0 \nVdash \Box p$, ed inoltre $w \nVdash \Diamond\Box p$ perché w_0 è l'unico mondo cui w accede. Similmente $w_2 \Vdash p$ e $w_0 R w_2$, dunque $w_0 \nVdash \Box\neg p$ ed inoltre $w \nVdash \Box\Box\neg p$ perché $w R w_0$.

4 Un frammento della logica temporale

Si consideri il linguaggio della logica temporale **LTL** ristretto alla grammatica

$$A \quad := \quad p \mid \neg p \mid \ \circ A \mid \Box A$$

Si ricordi che una *interpretazione* di una formula φ della logica **LTL** è una struttura $\mathcal{M} : (\mathbf{N}, \mathcal{V})$ in cui per ogni stato $i \in \mathbf{N}$ e per ogni atomo p, $\mathcal{V}(i, p) = V$ oppure $\mathcal{V}(i, p) = F$, ed inoltre

- $\mathcal{V}(i, \circ p) = V$ se e solo se $\mathcal{V}(i + 1, p) = V$;
- $\mathcal{V}(i, \Box\varphi) = V$ se e solo se per ogni $j \geq i$ vale $\mathcal{V}(j, \varphi) = V$; eccetera.

Per esempio, una interpretazione in cui la formula $\varphi = \neg p \wedge \circ\neg p \wedge \circ\circ\Box p$ è vera nello stato 0 si può scrivere come

$\neg p$	$\neg p$	p	$\cdots$	p	$\cdots$

dove i puntini suggeriscono che in tutti gli stati a partire dal terzo la formula p è vera.

4.1 Domanda 4

(i) Si costruisca una interpretazione in cui la formula $\varphi = p \wedge \Box \circ p$ è vera nello stato 0.

punti 1

Soluzione. Poniamo p vera in tutti gli infiniti stati del modello lineare.

p	p	p	$\cdots$	p	$\cdots$

disgiuntiva" ed alla premessa della **KR** inferiore; il mondo w è associato ai due sequenti più bassi.

(ii) Esiste una interpretazione in cui $\varphi = p \wedge \Box \circ p$ è vera nello stato n ma non nello stato $n+1$? Perché?

punti 1

Soluzione. Supponiamo che esista un modello lineare in cui $\varphi = p \wedge \Box \circ p$ sia vera nello stato n ma falsa nello stato $n+1$. Due casi sono possibili:[3]

1. p è falsa in $n+1$. Ma abbiamo supposto che $\Box \circ p$ sia vera in n, quindi in particolare $\circ p$ è vera in n e questo significa che p è vera in $n+1$, e questa è una contraddizione.

2. $\Box \circ p$ è falsa in $n+1$, cioè esiste un $j \geq n$ tale che $\circ p$ è falsa in $j+1$. Ma abbiamo supposto che $\Box \circ p$ sia vera in n, dunque $\circ p$ è vera in tutti gli stati maggiori di n in particolare in $j+1$, contraddizione.

In entrambe i casi otteniamo una contraddizione; dunque un tale modello non esiste.

[3]Si ricordi che "$\Box A$" significa intuitivamente "A è sempre vera", cioè vera in tutti gli stati del modello lineare.