Logica Computazionale 2009-2010

Gianluigi Bellin

19 marzo 2010

1 Domanda 1

Si considerino i sequenti S_1 ed 2_2

$$S_1 : \qquad (A \to B) \to B \Rightarrow (A \vee B)$$

$$S_2 : \qquad (A \vee B) \Rightarrow (A \to B) \to B$$

(i) Si applichi la procedura semantic tableaux per verificare se S_1 ed S_2 siano validi o falsificabili nella logica classica.

punti 2

(ii) Si trovi una deduzione normale d di $((A \to B) \to B) \to (\neg A \to B)$.
Suggerimento: Si dimostri $A \to B$ usando la regola *dal falso, qualsiasi cosa* nella forma

$$\begin{array}{c} \ldots A \\ \vdots \\ \dfrac{\bot}{B} \end{array}$$

punti 1

(iii) Si costruisca una derivazione senza taglio del sequente

$$S_3 : \qquad ((A \to B) \to B) \Rightarrow (\neg B \to \neg\neg A)$$

nel calcolo dei sequenti intuizionistico $\mathbf{LJ}^{\to}$.

punti 1

1.1 Soluzioni di (ii) e (iii)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\overset{(1)}{[((A \to B) \to B)]}$}
\AxiomC{$\overset{(2)}{[A \to \bot]}$}
\AxiomC{$\overset{(3)}{[A]}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{$\bot$}
\RightLabel{\textit{ex falso}}
\UnaryInfC{B}
\LeftLabel{(3)}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$A \to B$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{B}
\LeftLabel{(2)}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$\neg A \to B$}
\LeftLabel{(1)}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$((A \to B) \to B) \to (\neg A \to B)$}
\end{prooftree}
$$

Nota: Il suggerimento riguardava costruzione della premessa minore della inferenza $\to$-E nel ramo di livello zero della derivazione.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \Rightarrow A$}
\RightLabel{$\neg$-L}
\UnaryInfC{$\neg A, A \ \Rightarrow$}
\RightLabel{\textit{weakening}}
\UnaryInfC{$\neg A, A \ \Rightarrow \ B$}
\RightLabel{$\to$-R}
\UnaryInfC{$\neg A \ \Rightarrow \ A \to B$}
\AxiomC{$B \ \Rightarrow B$}
\RightLabel{$\neg$-L}
\UnaryInfC{$B, \neg B \ \Rightarrow$}
\RightLabel{$\to$-L}
\BinaryInfC{$(A \to B) \to B, \neg B, \neg A \ \Rightarrow$}
\RightLabel{$\neg$-R}
\UnaryInfC{$(A \to B) \to B, \neg B \ \Rightarrow \ \neg\neg A$}
\RightLabel{$\to$-R}
\UnaryInfC{$(A \to B) \to B \Rightarrow \neg B \to \neg\neg A$}
\end{prooftree}
$$

Nota: Si richiede una derivazione nel calcolo dei sequenti intuizionista $\mathbf{LJ}^{\to}$, cioè occorre che ci sia al più una formula nel succedente di ogni sequente (a destra di $\Rightarrow$). Per ottenere questo, procedendo dal basso in alto occorre dilazionare il puù possibile l'applicazione delle regole $\neg$-L che introducono le formule $\neg A$ e $\neg B$ quali compaiono nell'antecedente del terz'ultimo sequente dal basso. Occorre inoltre ricordare di introdurre per weakening la formula B nel succedente del terzo sequente del ramo sinistro, altrimenti l'assioma che chiude il ramo sinistro diventa non-intuizionistico: $A \Rightarrow B, A$.

2 Domanda 2

Si consideri il sequente

S_4: $\Rightarrow \exists x.\forall y.A(y \vee A(x))$.

Si applichi la procedura semantic tableaux per verificare se S_4 sia valido nel calcolo dei predicati del primo ordine per la logica classica.

punti 2

Nota: In S_4 $A(y)$ denota il risultato della sostituzione di y per tutte le occorrenze di x in $A(x)$.

3 Domanda 3

(i) Si consideri il sequente S_5 per la logica modale:

S_5 : $\Box A \Rightarrow \Diamond A$

Si applichi la procedura semantic tableaux per la logica **K** per decidere se S_5 sia valido o falsificabile in **K**.

punti 1

(ii) Se S_5 è falsificabile in **K**, si costruisca un Modello di Kripke $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ che lo falsifica.

punti 1

(iii) Si applichi la procedura semantic tableaux per la logica **KD** per decidere se S_5 sia valido o falsificabile in **KD**.

punti 1

3.1 Risposta a (ii)

Si consideri il modello di Kripke $\mathcal{M} = (\{w_0\}, \emptyset, \emptyset)$. Abbiamo:

- $w_0 \Vdash \Box A$ se e solo se per ogni w' accessibile da w_0 abbiamo $w' \Vdash A$;
- ma non vi è alcun mondo possibile w' accessibile da w_0, dunque la condizione è banalmente soddisfatta e $w_0 \Vdash \Box A$.
- $w_0 \Vdash \Diamond A$ se e solo se esiste w' accessibile da w_0 tale che $w' \Vdash A$;
- ma non vi è alcun mondo possibile w' accessibile da w_0, dunque la condizione è falsa e $w_0 \nVdash \Diamond A$.

4 Domanda 4

4.1 Un frammento della logica temporale

Si consideri il linguaggio della logica temporale **LTL** ristretto alla grammatica

$$A \quad := \quad p \mid \neg p \mid \bot \mid \top \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \circ A \mid \Box A \mid \Diamond A$$

Si considerino le seguenti regole di **LTL**.

assioma

$$\Gamma, p \Rightarrow p, \Delta$$

assioma

$$\Gamma \Rightarrow \top, \Delta$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \wedge \psi} \wedge\text{-R} \qquad \frac{\Gamma, \phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi \wedge \psi \Rightarrow \Delta} \wedge\text{-L}$$

$$\frac{\Rightarrow \Gamma, \phi, \psi}{\Rightarrow \Gamma, \phi \vee \psi} \vee\text{-R} \qquad \frac{\phi, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\phi \vee \psi, \Gamma \Rightarrow \Delta} \vee\text{-L}$$

$$\frac{\phi_1, \ldots, \phi_m \Rightarrow \psi_1, \ldots, \psi_n}{p_1, \ldots p_k, \circ\phi_1, \ldots, \circ\phi_m \Rightarrow q_1, \ldots q_\ell, \circ\psi_1, \ldots, \circ\psi_n} \; next$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \vee \circ\Diamond\phi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Diamond\phi} \Diamond\text{-exp R} \qquad \frac{\Gamma, \phi \vee \circ\Diamond\phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Diamond\phi \Rightarrow \Delta} \Box\text{-exp L}$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \phi \wedge \circ\Box\phi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \Box\phi} \Box\text{-exp R} \qquad \frac{\Gamma, \phi \wedge \circ\Box\phi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Box\phi \Rightarrow \Delta} \Box\text{-exp L}$$

Le regole indicate sono corrette rispetto alla semantica della logica **LTL** del tempo futuro lineare e si applicano in una procedura semantic tableaux nel modo familiare, anche se tale procedura non è completa (occorrono altre regole per $\Box$).

4.2 Domande

Si considerino i sequenti S_3 ed S_4 come espressioni della logica temporale **LTL**:

S_6 : $\quad \Box p \Rightarrow, \Diamond p$

S_7 : $\quad \Box p \Rightarrow \Diamond \neg p$

Si applichi la procedura sopra descritta per verificare se S_6 ed S_7 sono validi o falsificabili. Se un sequente è falsificabile, si scontruisca un modello lineare con $\mathcal{V} : \mathbf{N} \to 2^{\mathbf{Prop}}$ che lo falsifica.

3 punti

4.3 Contromodello

Si consideri un modello lineare $\mathcal{M} : (\mathbf{N}, \mathcal{V})$ dove la funzione $\mathcal{V}$ assegna valore vero a p per ogni $i \in \mathbf{N}$, cioè

$0 \Vdash p$	$1 \Vdash p$	$2 \Vdash p$	$\ldots\ i \Vdash p \ldots$ per ogni $i \in \mathbf{N}$.

Chiaramente p è sempre vera e $\neg p$ non è mai vera in $\mathcal{M}$.