Deduzione Automatica – AA 2002 - 2003

Gianluigi Bellin

September 29, 2003

1 Introduzione

Aspetti dell'analisi logica dei linguaggi: [1]

- **sintassi:** le regole che consentono di formare tutte e sole le *espressioni corrette* (*ben formate*) di un linguaggio $\mathcal{L}$.
- **semantica:** le regole che stabiliscono connessioni tra il linguaggio considerato e le entità cui il linguaggio si riferisce (qualunque sia la natura di tali entità, l'universo in cui viviamo o frammenti di esso, situazioni presenti, passate o future, oppure entità linguistiche o oggetti astratti, sistemi formali, ecc.). Componenti essenziali della semantica formale sono l'*interpretazione* del linguaggio in una struttura $\mathcal{M}$ e la definizione della nozione di *verità in* $\mathcal{M}$.
- **prammatica:** le *regole d'uso* del linguaggio nella comunicazione tra gli agenti del linguaggio (esseri umani, animali, computers, ecc.) in particolare gli atti illocutori: *asserzioni*, *obbligazioni*, *promesse*, ecc. Una teoria formale della prammatica non è ancora stata pienamente sviluppata. Compiti fondamentali sono l'identificazione degli *operatori di forza illocutoria* e dei *criteri di giustificazione* per gli atti illocutori.

2 Calcolo proposizionale classico

2.1 Sintassi

Il linguaggio $\mathcal{L}$ è costruito a partire da un simbolo di costante proposizionale $\perp$ (denotante una proposizione assurda) e da una lista (possibilmente infinita)

[1] Ringrazio Ettore Duliman per aver letto attentamente le bozze e suggerito correzioni.

di *lettere proposizionali* p, p_0, p_1 $\ldots$, attraverso i *connettivi proposizionali* $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.

Definizione. *Sia data una lista* **Atomi**: $p, p_0, p_1 \ldots.$ *Il linguaggio* $\mathcal{L}$ *è dato dalla grammatica seguente:*

$$A \ := \ p \mid \bot \mid \neg A \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \rightarrow A \mid$$

2.2 Semantica vero-funzionale

Definizione (interpretazione). Una *interpretazione* del linguaggio $\mathcal{L}$ è una assegnazione di valori di verità alle formule di $\mathcal{L}$, cioè una *funzione totale* $\mathcal{V}$: **Atomi** $\rightarrow \{V, F\}$ che si estende a tutte le formule in $\mathcal{L}$ secondo le regole seguenti:

1. $\mathcal{V}(\bot) = F$;
2. $\mathcal{V}(\neg A) = V$ se e solo se $\mathcal{V}(A) = F$;
3. $\mathcal{V}(A \wedge B) = V$ se e solo se $\mathcal{V}(A) = V$ e $\mathcal{V}(B) = V$;
4. $\mathcal{V}(A \vee B) = V$ se e solo se $\mathcal{V}(A) = V$ o $\mathcal{V}(B) = V$;
5. $\mathcal{V}(A \rightarrow B) = F$ se e solo se $\mathcal{V}(A) = V$ e $\mathcal{V}(B) = F$.

Dunque nel caso della logica proposizionale classica la nozione di *interpretazione* coincide con quella di *assegnazione di valori di verità.*

Definizione (modello, soddisfacibilità, validità, conseguenza valida).

- Diciamo che $\mathcal{V}$ è un *modello* di A se $\mathcal{V}(A) = V$ e che $\mathcal{V}$ è un *contromodello* di A se $\mathcal{V}(A) = F$.

  Identificando l'interpretazione $\mathcal{M}$ con la valutazione $\mathcal{V}$, scriviamo

  $\models_{\mathcal{M}} A$ se $\mathcal{V}(A) = V$ e $\not\models_{\mathcal{M}} A$ se $\mathcal{V}(A) = F$.

- Diciamo che A è *soddisfacibile* se esiste $\mathcal{M}$ tale che $\models_{\mathcal{M}} A$.

  Diciamo che A è *falsificabile* se esiste $\mathcal{M}$ tale che $\not\models_{\mathcal{M}} A$.

- Diciamo che A è *valida* se per ogni $\mathcal{M}$ abbiamo $\models_{\mathcal{M}} A$.

Inoltre sia Γ un insieme di formule. Scriviamo $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A$ se e solo se

$$\models_{\mathcal{M}} C \ \text{ per ogni } \ C \in \Gamma \ \text{ implica } \ \models_{\mathcal{M}} A.$$

- Diciamo che A è *conseguenza valida* di Γ, scrivendo $\Gamma \models A$, se e solo se $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A$ vale per ogni $\mathcal{M}$.

2.2.1 Nota sulla formalizzazione del linguaggio naturale

La formalizzazione del linguaggio naturale nel calcolo proposizionale classico dotato di una semantica vero-funzionale non è affatto un processo meccanico, e questo per varie ragioni.

Una ragione è che parte dell'informazione trasmessa da un enunciato è *implicita*. Ad esempio, l'ordine narrativo implicitamente trasmette informazione sull'ordine temporale degli eventi descritti, mentre la congiunzione classica è *commutativa*; confrontare $A \wedge B$ e $B \wedge A$ dove

- A: *l'uomo entrò nella casa;*
- B: *la vittima fu assassinata.*

Un'altra ragione di ambiguità della traduzione è che elementi *prammatici* possono determinare la struttura sintattica e l'interpretazione semantica di un enunciato. Ad esempio, consideriamo l'enunciato

> *Se tu non aiuti me quando io ho bisogno di te, io non aiuto te quando hai bisogno di me.*

Ponendo

- (B_i) *io ho bisogno di te;*
- (A_t) *tu aiuti me;*
- (B_t) *tu hai bisogno di me;*
- (A_i) *io aiuto te.*

possono esserci dubbi su come formalizzare la condizione *"se tu non aiuti me quando io ho bisogno di te"*.

Una ragione di tale ambiguità può essere il valore prammatico di una enuciazione di questa proposizione: un tale enunciato può servire a ricordare l'esistenza di un *patto*, cioè di una mutua promessa revocabile tra due soggetti i e t. Una volta enunciato, un patto costituisce una obbligazione per t e per i fintantochè i o t non lo revochino; una violazione del patto, cioè il non adempimento della promessa da parte di uno dei contraenti, costituisce di per sè una revoca del patto.

2.3 "Semantic Tableaux" per la logica classica

Definiamo una procedura *"semantic tableaux"* per la logica classica. Questa procedura, data una formula A di $\mathcal{L}$, accetta A se $\models A$ e ritorna un modello $\mathcal{M}$ tale che $\not\models_{\mathcal{M}} A$ altrimenti.

In effetti, facciamo qualcosa di più: diamo una procedura che funziona per *insiemi finiti di formule.*

Siano $\Gamma = C_1, \ldots, C_m$ e $\Delta = D_1, \ldots, D_n$ insiemi finiti di formule. Chiamiamo *sequente* una espressione formale $\Gamma \Rightarrow \Delta$; l'interpretazione intesa di un tale sequente è

$$(\bigwedge_{i=1}^{m} C_i) \rightarrow (\bigvee_{j=1}^{n} C_j).$$

Definizione. (sequente valido, falsificabile) Sulla base di questa interpretazione, diciamo che un sequente $S = C_1, \ldots, C_m \Rightarrow D_1, \ldots, D_n$ è *valido* e scriviamo $\models S$, se *per ogni interpretazione* $\mathcal{V}$

- $\mathcal{V}(C_i) = F$ per qualche $i \leq m$ oppure
- $\mathcal{V}(D_j) = V$ per qualche $j \leq n$.

Un sequente che non è valido è *falsificabile* cioè, *per qualche interpretazione* $\mathcal{M}$, cioè per qualche interpretazione $\mathcal{V}$,

- $\mathcal{V}(C_i) = V$ per ogni $i \leq m$ ed inoltre
- $\mathcal{V}(D_j) = F$ per ogni $j \leq n$.

Teorema. *La seguente procedura "semantic tableaux" per la logica proposizionale classica data una formula A di $\mathcal{L}$,*

- *ritorna un albero di sequenti τ con $\Rightarrow A$ alla radice tale che ogni sequente in τ è valido, se $\models A$;*
- *ritorna una interpretazione $\mathcal{M}$ che refuta A (cioè, $\not\models_{\mathcal{M}} A$) altrimenti.*

Procedura: costruisci un albero di sequenti τ (con radice in basso) detto *albero di refutazione* come segue:

(o) inizia con $\tau_0 = \ \Rightarrow A$;

(n+1) se una delle foglie di τ_n ha la forma di un *sequente conclusione* di una delle regole seguenti, allora τ_{n+1} è ottenuto scrivendo i *sequenti premessa* di tale regola come nuove foglie. Altrimenti, la procedura termina e $\tau = \tau_n$.

regole logiche

$$\frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}\ \textit{right } \neg \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \textit{left } \neg$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}\ \textit{right } \wedge \qquad \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \textit{left } \wedge$$

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma \Rightarrow A \to B, \Delta}\ \textit{right } \to \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \textit{left } \to$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}\ \textit{right } \vee \qquad \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ \textit{left } \vee$$

Table 1: Regole Proposizionali Classiche

Sia $S = C_1, \ldots, C_m \Rightarrow D_1, \ldots, D_n$. Definiamo la *dimensione* (*size*) $s(S)$ di S ponendo

$$s(S) \quad = \quad \left(\Sigma_{i=1}^{m} s(C_i)\right) \; + \; \Sigma_{j=1}^{n} s(D_j)$$

dove

$$s(p) = 1 \qquad s(\bot) = 0 \qquad s(\neg A) = s(A) + 1$$

$$s(A \wedge B) = s(A \vee B) = s(A \to B) = s(A) + s(B) + 1$$

Proposizione 1. *L'albero di refutazione τ è finito.*

Dimostrazione: Ad ogni passo della procedura la dimensione del sequente diminuisce.

$\Box$

Proposizione 2. *In ogni applicazione delle regole proposizionali classiche il sequente-conclusione di ogni regola è falsificabile se e solo se almeno uno dei sequenti-premessa è falsificabile.*

Dimostrazione: Per ispezione delle regole. Ad esempio cosideriamo la la regola *left* $\to$. Se esiste una valutazione $\mathcal{V}$ tale che $\mathcal{V}(C) = V$ per ogni $C \in \Gamma$,

$\mathcal{V}(D) = F$ per ogni $D \in \Delta$ ed inoltre $\mathcal{V}(A \to B) = V$, allora abbiamo due possibilità (non esclusive):
(1) o $\mathcal{V}(A) = F$, ed in questo caso $\mathcal{V}$ refuta il sequente-premessa sinistro $\Gamma \Rightarrow \Delta, A$;
(2) o $\mathcal{V}(B) = V$, ed in questo caso $\mathcal{V}$ refuta il sequente-premessa destro $B, \Gamma \Rightarrow \Delta$.
Conversamente, sia $\mathcal{V}$ una valutazione che refuta uno dei sequenti-premessa, dunque $\mathcal{V}(C) = V$ per ogni $C \in \Gamma$ e $\mathcal{V}(D) = F$ per ogni $D \in \Delta$. Se $\mathcal{V}$ refuta il sequente-premessa sinistro, allora $\mathcal{V}(A) = F$, e dunque $\mathcal{V}(A \to B) = V$, ed il sequente conclusione è refutato. Se $\mathcal{V}$ refuta il sequente-premessa destro, allora $\mathcal{V}(B) = V$, e dunque ancora $\mathcal{V}(A \to B) = V$, ed il sequente conclusione è refutato.

□

Proposizione 3. *Un sequente della forma*

$$p, p_1, \dots, p_m \Rightarrow p, q_1, \dots, q_n \tag{§}$$

non è falsificabile.

Dimostrazione: Ovvio.

□

Un sequente di dice *chiuso* se è della forma indicata in Proposizione 3.

Un *ramo* dell'albero di refutazione τ è *chiuso* se e solo se la sua foglia è un sequente chiuso.

Dimostrazione del Teorema. Quando la procedura termina, si danno due casi:

- tutte le foglie di τ sono chiuse. Per induzione sulla lunghezza di τ, usando le proposizioni 2 e 3, si dimostra che nessun sequente in τ è falsificabile, dunque neppure la radice $\Rightarrow A$, cioè $\models A$.

- una foglia $p_1, \dots, p_m \Rightarrow q_1, \dots, q_m$ di τ è aperta. Sia β il ramo che da va dalla radice $\Rightarrow A$ a tale foglia. Definiamo $\mathcal{V}$: **Atomi** $\to \{V, F\}$ come segue:

$$\mathcal{V}(p_i) = V, \text{ per } i \leq m; \quad \mathcal{V}(q_j) = F, \text{ per } j \leq n;$$

$$\mathcal{V}(p) = \text{arbitrario, se } p_i \neq p \neq q_j, \text{ per } i \leq m, j \leq n$$

  Per induzione sulla lunghezza di β, usando la proposizione 2, si dimostra che $\mathcal{V}$ refuta ogni sequente S in β e dunque $\mathcal{V}(A) = F$.

$\square$

Corollario della proposizione 2. *Le regole proposizionali classiche preservano la validità e sono semanticamente invertibili.*

Nota. Consideriamo le seguenti regole di *indebolimento* (*weakening*):

$$\textit{weakening right:}\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A} \qquad \textit{weakening left:}\quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Proposizione 4. *Le regole di indebolimento preservano la validità, ma non sono semanticamente invertibili.*

Dimostrazione. Se il sequente-premessa $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è valido, allora per ogni valutazione $\mathcal{V}$ esiste un $C \in \Gamma$ tale che $\mathcal{V}(C) = F$ oppure esiste un $D \in \Delta$ tale che $\mathcal{V}(D) = V$ ed allora in entrambe le regole anche il sequente-conclusione è valido.

Ma se invertiamo le regole di *weakening* allora possiamo avere che il sequente-conclusione sia valido ma il sequente premessa sia falsificabile. Infatti se per qualche valutazione $\mathcal{V}$ abbiamo $\mathcal{V}(C) = V$ per ogni $C \in \Gamma$ e $\mathcal{V}(D) = F$ per ogni $D \in \Delta$, ma $\mathcal{V}(A) = V$, allora il sequente-premessa della regola *weakening right* non è valido anche se il sequente-conclusione lo fosse. Similmente, se per qualche valutazione $\mathcal{V}$ abbiamo $\mathcal{V}(C) = V$ per ogni $C \in \Gamma$ e $\mathcal{V}(D) = F$ per ogni $D \in \Delta$, ma $\mathcal{V}(A) = F$, allora il sequente-premessa della regola *weakening left* non è valido anche se il sequente-premessa lo fosse.

2.4 Esercizi.

Esercizio 1. Dimostrare che in ciascuna linea le formule sono semanticamente equivalenti:

(a) A; $\neg\neg A$; $(A \wedge A)$; $(A \vee A)$; $(A \wedge (A \vee B))$; $(A \vee (A \wedge B)$.

(b) $\neg A$; $A \to (B \wedge \neg B)$.

(c) $\neg(A \vee B)$; $(\neg A \wedge \neg B)$. (*De Morgan*)

(d) $\neg(A \wedge B)$; $(\neg A \vee \neg B)$. (*De Morgan*)

(e) $(A \vee B)$; $(B \vee A)$; $(\neg B \to A)$; $\neg(\neg A \wedge \neg B)$; $((A \to B) \to B)$.

(f) $(A \wedge B)$; $(B \wedge A)$; $\neg(A \rightarrow \neg B)$; $\neg(\neg A \vee \neg B)$.

(g) $(A \rightarrow B)$; $(\neg A \vee B)$; $\neg(A \wedge \neg B)$; $(\neg B \rightarrow \neg A)$.

(h) $(A \rightarrow \neg B)$; $(B \rightarrow \neg A)$. (*contrapposizione*)

(i) $(A \leftrightarrow B) =_{def} (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ $((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$.

(j) $\neg(A \leftrightarrow B)$; $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B))$; $((\neg A) \leftrightarrow B)$.

(k) $(A \wedge (B \vee C))$; $((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$. (*distributività*)

(l) $(A \vee (B \wedge C))$; $((A \vee B) \wedge (A \vee C))$. (*distributività*)

(m) $((A \vee B) \rightarrow C)$; $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$.

(n) $(A \rightarrow (B \wedge C))$; $((A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C))$.

(o) $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$; $((A \wedge B) \rightarrow C)$.

Esercizio 2. Verificare se i seguenti sequenti sono falsificabili:

(a) $(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow (C \vee (B \wedge A))$.

(b) $(A \wedge (B \vee C)) \Rightarrow (C \vee (B \wedge A))$.

(c) $(A \vee (B \wedge C)) \Rightarrow (C \wedge (B \vee A))$.

(d) $(A \rightarrow (B \vee C)) \Rightarrow ((A \rightarrow B) \vee C)$.

(e) $((A \rightarrow B) \vee C)) \Rightarrow (A \rightarrow (B \vee C))$.

(f) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \Rightarrow A$.

Esercizio 3. (a) Dimostrare in dettaglio che nelle seguenti regole il sequente-conclusione è falsificabile se e solo se almeno uno dei sequenti-premessa è falsificabile:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\neg A, \Gamma \Rightarrow}$$

(b) Dimostrare che se i sequenti-premessa della seguente regola sono entrambe validi, allora il sequente-conclusione è valido:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad\qquad A, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta, \Delta'}$$

3 Logiche modali

Le nozioni di *necessità* e *possibilità* furono studiate approfonditamente da Aristotele e svolsero un ruolo fondamentale nella filosofia antica e medievale. L'analisi moderna di questi concetti prese nuovo impulso con il filosofo e matematico Leibniz, che introdusse la nozione di *mondo possibile* e la considerazione della necessità come *verità in tutti i mondi possibili*. Nel corso del XX secolo questa idea è stata sviluppata con i metodi matematicamente rigorosi della semantica formale. Nonostante ciò molti filosofi analitici contemporanei, sulla scia di Quine, guardano con sospetto alle nozioni modali: sembra infatti impossibile definire una nozione modale senza fare riferimento ad altre nozioni modali (ad esempio, Leibniz spiega la nozione di necessità sulla base della nozione di "mondo possibile", essa stessa evidentemente una nozione modale).

Il filosofo e matematico Kripke ha sviluppato le idee di Leibniz introducendo la nozione di *accessibilità tra mondi possibili*. L'idea fondamentale di Kripke è che se per verificare la *necessità logica* di una proposizione A occorre verificare la verità di A in *tutti* i mondi possibili, per altre modalità solo *alcuni* mondi possibili vanno considerati, quelli che sono simili al mondo attuale negli aspetti che riguardano la modalità studiata. Per esempio, per verificare se A è *fisicamente necessaria* basta considerare se A è vera in tutti i mondi possibili in cui valgono le stesse leggi naturali che valgono nel nostro mondo. D'altronde per verificare la *necessità secondo un certo ordinamento giuridico*, ad esempio quello definito dalla costituzione italiana, dobbiamo considerare tutti i mondi possibili in cui i principi fondamentali della costituzione italiana sono fedelmente applicati, dunque non l'Italia reale.

Negli ultimi decenni la teoria matematica delle varie logiche modali è stata applicata in molti settori dell'informatica teorica, dei metodi formali e dell'intelligenza artificiale.

Consideriamo le principali logiche modali: **K**, **K4**, **GL**, **KD**, **S4** ed estenderemo a tali logiche i risultati della sezione 2.

3.1 Sintassi

Il linguaggio $\mathcal{L}^\Box$ delle logiche modali estende il linguaggio $\mathcal{L}$ della logica classica con un operatore proposizionale unario $\Box$. L'espressione $\Box A$ si può leggere come *"necessariamente A"*, ma il significato della modalità viene specificato in modo diverso in diverse logiche.

Definizione. *Il linguaggio $\mathcal{L}^\Box$ è dato dalla grammatica seguente:*

$$A \;:=\; p \mid \bot \mid \neg A \mid A \wedge A \mid A \vee A \mid A \to A \mid \Box A \mid$$

3.2 Semantica di Kripke

Definizione. (modello di Kripke) Una *interpretazione* del linguaggio $\mathcal{L}^\Box$ è data da un *modello di Kripke*, cioè una tripla $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ dove

- W è un insieme (di *"mondi possibili"*);
- $\sqsubseteq \subset W \times W$ è una relazione (di *"accessibilità"* tra mondi possibili);
- $\mathcal{V} : W \times \textbf{Atomi} \to \{V, F\}$ è una *funzione totale* che assegna valori di verità alle formule atomiche di $\mathcal{L}^\Box$ *relativamente a ciascun mondo possibile.*

La funzione $\mathcal{V}$ è estesa a tutte le formule in $\mathcal{L}^\Box$ secondo le regole seguenti:

1. $\mathcal{V}(w, \bot) = F$ per ogni $w \in W$;
2. $\mathcal{V}(w, \neg A) = V$ se e solo se $\mathcal{V}(w, A) = F$;
3. $\mathcal{V}(w, A \wedge B) = V$ se e solo se $\mathcal{V}(w, A) = V$ e $\mathcal{V}(w, B) = V$;
4. $\mathcal{V}(w, A \vee B) = V$ se e solo se $\mathcal{V}(w, A) = V$ o $\mathcal{V}(w, B) = V$;
5. $\mathcal{V}(w, A \to B) = F$ se e solo se $\mathcal{V}(w, A) = V$ e $\mathcal{V}(w, B) = F$;
6. $\mathcal{V}(w, \Box A) = V$ se e solo se $\mathcal{V}(w', A) = V$ per ogni $w' \in W$ tale che $w' \sqsubseteq w$.

Scriviamo $w \Vdash A$ (e leggiamo *"w forza A"* oppure *A è localmente vera nel mondo w*) come abbreviazione per $\mathcal{V}(w, A) = V$. Scriviamo $w \nVdash A$ (e leggiamo *"w non forza A"* oppure *A è localmente falsa nel mondo w*) come abbreviazione per $\mathcal{V}(w, A) = F$. Con questa notazione, la precedente definizione si legge come segue:

1. $w \nVdash \bot$ per ogni $w \in W$;

2. $w \Vdash \neg A$ se e solo se $w \nVdash A$;

3. $w \Vdash A \wedge B$ se e solo se $w \Vdash A$ e $w \Vdash B$;

4. $w \Vdash A \vee B$ se e solo se $w \Vdash A$ o $w \Vdash B$;

5. $w \Vdash A \to B$ se e solo se $w \nVdash A$ oppure $w \Vdash B$;

6. $w \Vdash \Box A$ se e solo se $w' \Vdash A$ per ogni $w' \in W$ tale che $w' \sqsubseteq w$.

Utilizzeremo anche la seguente abbreviazione. Sia Γ un insieme di formule di $\mathcal{L}^\Box$ e sia A una formula di $\mathcal{L}^\Box$. Scriviamo $\Gamma \models_w A$ (*"A è localmente una conseguenza di Γ in w "*) se e solo se $w \Vdash C$ per ogni $C \in \Gamma$ implica $w \Vdash A$. Dunque, se $\Gamma = C_1, \ldots, C_n$, abbiamo

$$\Gamma \models_w A \qquad \text{se e solo se} \qquad w \Vdash (\bigwedge_i C_i) \to A.$$

Similmente, scriviamo $\Gamma \not\models_w A$ se e solo se $w \Vdash C$ per ogni $C \in \Gamma$ ma $w \nVdash A$. Se $\Gamma \Rightarrow \Delta$ è un sequente con $\Delta = D_1, \ldots, D_m$, diciamo che *$w$ refuta il sequente* $\Gamma \Rightarrow \Delta$ se e solo se $w \Vdash (\bigwedge_i C_i) \to (\bigvee_j D_j)$, cioè se e solo se

$$\Gamma \not\models_w D_j \qquad\qquad \text{per ogni } j \leq m.$$

Definizione (validità, soddisfacibilità in un modello di Kripke). Diciamo che una formula $A \in \mathcal{L}^\Box$ è *valida in un modello di Kripke* $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ e scriviamo $\models_{\mathcal{M}} A$ se ogni mondo in W forza A, cioè

$$\models_{\mathcal{M}} A \qquad \text{se e solo se} \qquad \forall w \in W. w \Vdash A.$$

Diciamo che A è *soddisfacibile nel modello di Kripke* $\mathcal{M}$ se esiste un mondo $w \in W$ tale che $w \Vdash A$.
Diciamo che A è *conseguenza valida di* Γ *nel modello di Kripke* $\mathcal{M}$ (e scriviamo $\Gamma \models_{\mathcal{M}} A$) se per ogni $w \in W$ abbiamo che A è localmente conseguenza di Γ in w. In simboli,

$$\Gamma \models_{\mathcal{M}} A \qquad \text{se e solo se} \qquad \forall w \in W.\ \Gamma \models_w A.$$

3.3 Frames (Cornici di Kripke)

Per definire la nozione di validità nei vari sistemi modali conviene considerare le nozioni precedenti in modo un po' più generale e definire la nozione di *frame*.

Definizione (cornice di Kripke). Una *cornice di Kripke* (o *frame*) è una coppia $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ dove

- W è un insieme (di *"mondi possibili"*);
- $\sqsubseteq\ \subset\ W \times W$ è una relazione (di *"accessibilità"* tra mondi possibili).

Diciamo che il modello di Kripke $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ è definito *sulla* cornice $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$. Diciamo che una formula A è *valida in una cornice* $\mathcal{F}$ (e scriviamo $\models_{\mathcal{F}} A$) se A è valida su tutti i modelli di Kripke definiti su $\mathcal{F}$; diciamo che A è *soddisfacibile in una cornice* $\mathcal{F}$ se è soddisfacibile in qualche modello di Kripke definito su $\mathcal{F}$; diciamo che A è *conseguenza valida di* Γ *nella cornice* $\mathcal{F}$ (e scriviamo $\Gamma \models_{\mathcal{F}} A$) se se A è conseguenza valida di Γ in ogni modello di Kripke definito su $\mathcal{F}$.

4 Semantica per il sistema K

Il sistema **K** è il sistema modale più generale: la semantica per **K** è basata sulla nozione di validità *in ogni modello di Kripke*, o in modo equivalente, validità *in tutte le cornici.*

Definizione (semantica per K). Una formula $A \in \mathcal{L}^{\Box}$ è *valida in* **K**, in simboli $\models_{\mathbf{K}} A$, se per ogni cornice di Kripke $\mathcal{F}$ si ha $\models_{\mathcal{F}} A$. Una formula A è *conseguenza valida di* Γ *in* **K** (in simboli $\Gamma \models_{\mathbf{K}} A$) se per ogni cornice $\mathcal{F}$ si ha $\Gamma \models_{\mathcal{F}} A$.

Proposizione 0.1. (i) $\models_{\mathbf{K}} \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.

(ii) *Siano $P_1, \ldots, P_n$ atomi, siano $A_1, \ldots, A_n$ formule di $A \in \mathcal{L}^{\Box}$ e supponiamo che $A[P_1/A_1, \ldots, P_n/A_n]$ risulti da A per sostituzione simultanea di P_i con A_i per $i \leq n$. Allora $\models_{\mathbf{K}} A$ implica $\models_{\mathbf{K}} A[P_1/A_1, \ldots, P_n/A_n]$.*

Dimostrazione di (i). Sia $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ un modello di Kripke qualsiasi. Dato $w \in W$, supponiamo $w \Vdash \Box A(\to B)$ e mostriamo $w \Vdash \Box A \to \Box B$. Per ipotesi, per ogni $w' \sqsubseteq w$ abbiamo $w' \Vdash A \to B$. Se inoltre $w \Vdash \Box A$ allora per ogni $w' \sqsubseteq w$ abbiamo $w' \Vdash A$, da cui segue che per ogni $w' \sqsubseteq w$ abbiamo $w' \Vdash B$, cioè $w \Vdash \Box B$.

$\Box$

Proposizione 0.2. *Sia $\mathcal{F} = (W, \emptyset)$ una cornice discreta. Allora per ogni formula A vale $\models_{\mathcal{F}} \Box A$.*

Dimostrazione. Per ogni $\mathcal{V} : W \times \textbf{Atomi} \to \{T, F\}$ e per ogni $w \in W$ abbiamo

$$w \Vdash \Box A \quad \text{se e solo se per ogni } w' \sqsubseteq w \text{ vale} \quad w' \Vdash A.$$

La condizione è sempre vera, perchè in $\mathcal{F}$ non esiste w' tale che $w' \sqsubseteq w$.

$\square$

4.1 "Semantic tableaux" per K

Notazione. Se $\Gamma = C_1, \ldots, C_n$ allora $\Box\Gamma = \Box C_1, \ldots, \Box C_n$.

Consideriamo la seguente regola **KR**:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\mathbf{KR}$$

dove Γ può essere vuoto, ma deve esserci *esattamente una formula* a destra di $\Rightarrow$.

Lemma 1. *La regola* **KR** *preserva la validità ed è semanticamente invertibile (rispetto alla semantica di Kripke per* **K***).*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ un modello di Kripke che refuta il sequente-conclusione $\Box\Gamma \Rightarrow \Box A$. Sia $w \in W$ tale che $\Box\Gamma \not\models_w \Box A$: allora per ogni $w' \sqsubseteq w$ abbiamo $w' \Vdash C$ per ogni $C \in \Gamma$ ma esiste $w_0 \in W$ tale che $w_0 \sqsubseteq w$ e $w_0 \nVdash A$. Dunque $\Gamma \not\models_{w_0} A$ e pertanto $\mathcal{M}$ refuta anche il sequente-premessa $\Gamma \Rightarrow A$.

Conversamente, sia $\mathcal{M}' = (W', \sqsubseteq', \mathcal{V}')$ un modello di Kripke che refuta il sequente-premessa $\Gamma \Rightarrow A$, e sia $w_0 \in W$ un mondo tale che $\Gamma \not\models_{w_0} A$. Costruiamo un modello $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ dove

- $W = W' \cup \{w\}$, dove w non compare in W';
- $\sqsubseteq \, = \, \sqsubseteq' \cup \{w_0 \sqsubseteq w\}$;
- $\mathcal{V}$ coincide con $\mathcal{V}'$ su W' ed inoltre $\mathcal{V}(w, P)$ è un valore V o F arbitrario, per ogni atomo P.

Allora per ogni $C \in \Gamma$ abbiamo

$$w \Vdash \Box C \text{ se e solo se } \forall w' \sqsubseteq w.\ w' \Vdash C \text{ se e solo se } w_0 \Vdash C,$$

poichè w_0 è l'unico mondo accessibile da w; inoltre abbiamo $w \nVdash \Box A$ poichè $w_0 \nVdash A$ e $w_0 \sqsubseteq w$. In conclusione, $\Box\Gamma \not\models_w \Box A$.

$\square$

Vogliamo estendere la procedura "Semantic Tableaux" alla logica **K**. La novità principale risiede nelle restrizioni sul sequente-conclusione della regola **KR**, che deve contenere solo formule modali ed esattamente una formula a destra di $\Rightarrow$. Invertiremo dunque tutte le regole per i connettivi proposizionali, come nel caso della logica classica senza modalità, arrivando in ogni ramo ad un sequente della forma

$$p_1, \ldots, p_h, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_m, q_1, \ldots, q_\ell \qquad (\dagger)$$

Se $p_i \neq q_j$ per tutti gli $i \leq h$ ed i $j \leq \ell$, e se $m > 0$ allora la procedura ramifica: invertiremo tutti i sequenti

$$\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1 \qquad \ldots \qquad \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m$$

notando che *se almeno uno di tali sequenti risulta valido, allora anche il sequente* ($\dagger$) *è valido*, per ripetute applicazioni della regola del *weakening.* Se al contrario *tutti* i sequenti $\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m$ sono refutabili da modelli di Kripke $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_m$ allora utilizzeremo tali modelli per costruire un modello $\mathcal{M}$ che refuta il sequente ($\dagger$).

Chiameremo *ramificazione disgiuntiva* quella determinata da un sequente della forma ($\dagger$), perchè al contrario delle ramificazioni determinate dalle regole proposizionali binarie la validità di uno solo dei sequenti-premessa basta per stabilire la validità dei sequenti-conclusione.

Procedura: costruisci un albero di sequenti τ (con radice in basso) detto *albero di refutazione* come segue:

(o) inizia con $\tau_0 \; = \Rightarrow A$;

(n+1) *Sottocaso (i)*: se una delle foglie di τ_n ha la forma di un *sequente conclusione* di una delle regole della logica proposizionale classica, allora in τ_{n+1} *invertiamo tale regola*, cioè scriviamo i *sequenti premessa* di tale regola come nuove foglie.

Altrimenti tutte le foglie di τ_n sono sequenti della forma ($\dagger$) cioè contengono solo formule atomiche o formule modali.

Sottocaso (ii): Se in un sequente della forma ($\dagger$) abbiamo $p_i = q_j$ per qualche $i \leq h$ e $j \leq \ell$, allora il sequente è *chiuso* e la procedura termina su quel ramo.

Sottocaso (iii): Se in un sequente della forma ($\dagger$) abbiamo $p_i \neq q_j$ per ogni $i \leq h$ e $j \leq \ell$ ed inoltre non vi sono formule modali $\Box D$ (cioè, $m = 0$), allora il sequente è *aperto* e la procedura termina su quel ramo.

Sottocaso (iv): Se in un sequente della forma (†) abbiamo $p_i \neq q_j$ per ogni $i \leq h$ e $j \leq \ell$ ma vi sono formule modali $\Box D$ (cioè, $m > 0$), allora la procedura continua con una *ramificazione disgiuntiva* con m rami. Su ciascuno di questi rami la procedura continua invertendo la regola **KR** (vedi figura successiva).

Se in tutte le foglie la procedura termina, allora $\tau = \tau_n$.

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow D_1}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1}\mathbf{KR} \qquad \cdots \qquad \dfrac{\Gamma \Rightarrow D_m}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m}\mathbf{KR}$$

$$\vdots$$

$$p_1, \ldots, p_h, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_m, q_1, \ldots, q_\ell \qquad (\dagger)$$

(se $p_i \neq q_j$ per ogni $i \leq h$ e $j \neq \ell$
ed inoltre se $m > 0$)

Table 2: Ramificazione Disgiuntiva

Nota. Usando la notazione degli *ipersequenti*, cioè sequenti le cui componenti possono essere sia formule che sequenti, una ramificazione disgiuntiva si esprime come la seguente regola di inferenza:

$$\dfrac{\Rightarrow [p_1, \ldots, p_h \Rightarrow q_1, \ldots, q_\ell], [\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1], \ldots [\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m]}{p_1, \ldots, p_h, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_m, q_1, \ldots, q_\ell}$$

Lemma 2. *Un sequente della forma*

$$p_1, \ldots, p_h, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_m, q_1, \ldots, q_\ell \qquad (\dagger)$$

è falsificabile se e solo se tutti i sequenti

$$p_1, \ldots, p_h \Rightarrow q_1, \ldots, q_\ell, \qquad \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \quad \ldots \quad , \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m$$

sono falsificabili.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ un modello di Kripke tale che un mondo $w \in W$ refuta il sequente (†). Allora in W esistono $w_1 \sqsubseteq w$, ..., $w_m \sqsubseteq w$ tali che

$$\Gamma \not\models_{w_i} D_i, \qquad \text{per ogni } i \leq m.$$

Pertanto w refuta anche i sequenti $\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m$.

Conversamente, per ogni $0 < i \leq m$ sia $\mathcal{M}_i = (W_i, \sqsubseteq_i, \mathcal{V}_i)$ un modello di Kripke con un mondo $w_i \in W_i$ che refuta $\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_i$. Definiamo $\mathcal{M}_0 = (\{w\}, \emptyset, \mathcal{V}_0)$ ponendo

- $\mathcal{V}_0(w, p_i) = V$, per $i \leq h$;
- $\mathcal{V}_0(w, q_j) = F$, per $j \leq \ell$;
- $\mathcal{V}(w, P) = V$ è un valore V o F arbitrario, per ogni atomo P differente dai p_i e dai q_j.

Possiamo supporre che gli insiemi W_i siano tutti disgiunti tra loro. Allora in ogni W_i esiste un $w'_i \sqsubseteq w_i$ che refuta $\Gamma \Rightarrow D_i$. Costruiamo un modello $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ dove

- $W = \bigcup_{0 \leq i \leq m} W_i$;
- $\sqsubseteq = (\bigcup_i \sqsubseteq_i) \cup \{w'_i \sqsubseteq w$, per ogni $i \leq m\}$;
- $\mathcal{V}$ ristretta a W_i coincide con $\mathcal{V}_i$.

Il mondo w sarà detto la *radice* dell'albero $(W, \sqsubseteq)$.

Per definizione di $\mathcal{V}$ abbiamo $w \Vdash p_i$ e $w \nVdash q_j$ per ogni $i \leq h$ ed ogni $j \leq \ell$. Inoltre per ogni $C \in \Gamma$ abbiamo

$$w \Vdash \Box C \text{ se e solo se } \forall w' \sqsubseteq w.\, w' \Vdash C \text{ se e solo se per ogni } k \leq m, w'_k \Vdash C,$$

poichè $w'_1, \ldots, w'_m$ sono gli unici mondi accessibili da w; inoltre per ogni $k \leq m$ abbiamo $w \nVdash \Box D_k$ poichè $w'_k \nVdash D_k$ e $w'_k \sqsubseteq w$. In conclusione, w refuta il sequente (†).

$\Box$

Definizione. Definiamo simultaneamente cosa vuole dire che un albero di refutazione τ è *chiuso* e che un albero chiuso τ' è una *potatura* di τ.

1. un sequente $\Gamma, p, \Gamma' \Rightarrow \Delta, p, \Delta'$ è un albero *chiuso* ed una potatura di se stesso.
2. se τ risulta da τ_0 per applicazione di una regola proposizionale unaria o di **KR**, allora τ è *chiuso* se e solo se τ_0 è chiuso ed ogni potatura di τ risulta da una potatura di τ_0 per applicazione della stessa regola;

3. se τ risulta da τ_0 e τ_1 per applicazione di una regola proposizionale binaria, allora τ è *chiuso* se e solo se τ_0 e τ_1 sono chiusi ed ogni potatura di τ risulta da una potatura di τ_0 e da una potatura di τ_1 per applicazione della stessa regola;

4. se τ risulta da $\tau_1, \ldots, \tau_m$ per applicazione di una ramificazione disgiuntiva, allora τ è chiuso se e solo se almeno uno dei τ_i è chiuso. Sia τ_i uno dei sottoalberi chiusi di τ e sia τ_i' una potatura di τ_i. Se τ' ha lo stesso sequente conclusione di τ e risulta da τ_i' per successive applicazioni della regola del *weakening*, allora τ' è una potatura di τ.

Proposizione 1. *L'albero di refutazione τ è finito.*

Dimostrazione: Alla definizione della dimensione di una formula (sezione 2.3) aggiungiamo il caso

$$s(\Box A) = s(A) + 1.$$

Come nel caso della logica proposizionale classica senza modalità, ad ogni passo della procedura la dimensione del sequente diminuisce.

$\Box$

Proposizione 2. *Ogni regola applicata nella procedura preserva la validità ed è semanticamente invertibile* (rispetto alla semantica di Kripke per **K**.)

Dimostrazione: Proposizione 2 (sezione 2.3) per la logica proposizionale classica senza modalità, Lemmi 1 e 2.

$\Box$

Come sopra abbiamo

Proposizione 3. *Un sequente della forma*

$$p, p_1, \ldots, p_m \Rightarrow p, q_1, \ldots, q_n \tag{\S}$$

non è falsificabile.

Teorema. *La procedura "semantic tableaux" per la logica* **K**, *data una formula A di $\mathcal{L}^\Box$ ritorna un albero di sequenti τ con $\Rightarrow A$ alla radice che ha le seguenti proprietà:*

- *se $\models_{\mathbf{K}} A$, allora ogni potatura τ' di τ contiene solo sequenti validi;*

- *altrimenti se $\not\models_{\mathbf{K}} A$, allora si trovano sottoalberi aperti τ'' di τ, da cui si estraggono modelli di Kripke $\mathcal{M}$ tali che $\not\models_{\mathcal{M}} A$.*

Dimostrazione. Quando la procedura termina, si danno due casi:

- l'albero τ è chiuso. Sia τ' una potatura di τ. Per induzione sulla lunghezza di τ', usando le proposizioni 2 e 3, si dimostra che nessun sequente in τ' è falsificabile, dunque neppure la radice $\Rightarrow A$, cioè $\models_{\mathbf{K}} A$.

- l'albero τ è aperto, dunque la radice è aperta. Scegliamo un sottoalbero aperto τ'' su cui costruire il contromodello $\mathcal{M}$ come segue:

  • la radice $\Rightarrow A$ di τ è anche la radice di τ'';

  • se il sequente-conclusione di una regola unaria è in τ'', allora anche il sequente-premessa è in τ'';

  • se il sequente-conclusione di una regola binaria è in τ'', allora poniamo in τ'' un sequente-premessa *aperto*; un tale sequente esiste per la proposizione 2;

  • se il sequente-conclusione di una ramificazione disgiuntiva è in τ'', allora poniamo in τ'' tutti i sequenti-premessa; tali sequenti sono tutti aperti per la proposizione 2.

Costruiamo $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ come segue. Poichè τ'' ha solo ramificazioni disgiuntive, possiamo dividere τ'' in una sequenza di "segmenti di rami" β_1, $\ldots$, β_n tali che

$(*)$ la radice S_i di β_i è un sequente-premessa di una **KR** oppure la radice $\Rightarrow A$ di τ'' e

$(*)$ la foglia F_i di β_i è il primo sequente di forma $(\dagger)$ che si incontra risalendo τ'' a partire da S_i, oppure una foglia di τ''.

Tra i segmenti β_i definiamo un ordine $\prec$ ponendo $\beta_i \prec \beta_j$ se e solo se
$(*)$ la radice S_i di β_i è il sequente-premessa di una applicazione $\mathcal{I}$ della regola **KR** e
$(*)$ la foglia F_j di β_j è l'origine della ramificazione disgiuntiva di cui il sequente-conclusione di $\mathcal{I}$ è una delle premesse.

- Poniamo $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, dove *il ramo β_i è identificato con il mondo possibile w_i*;

- poniamo $w_i \sqsubseteq w_j$ se e solo se $\beta_i \prec \beta_j$;

- poniamo $\mathcal{V}(w_i, P) = V$ se e solo se P compare *alla sinistra di* $\Rightarrow$ *nel sequente di forma* (†) *che è la foglia di* β_i.

Per induzione sulla lunghezza di τ'', usando la proposizione 2, si dimostra che per ogni sequente S in τ'' vale $\not\models_{\mathcal{M}} S$, e dunque $\not\models_{\mathbf{K}} \Rightarrow A$.

Supponiamo pertanto che $\models_{\mathbf{K}} A$ allora l'albero τ generato dalla procedura non può essere aperto, altrimenti da τ'' otterremmo un modello $\mathcal{M}$ tale che $\not\models_{\mathcal{M}} A$, e questa è una contraddizione.

Supponiamo ora che $\not\models_{\mathbf{K}} A$ allora l'albero τ generato dalla procedura non può essere chiuso, altrimenti tutti i sequenti in τ' sarebbero validi e dunque $\models_{\mathbf{K}} A$, contraddizione.

$\square$

4.2 Esercizi

Esercizio 4. Basandosi sulla *semantica di Kripke* per **K**, verificare la validità delle seguenti formule o costruire un contromodello:

(a) $\neg\Box A \leftrightarrow \Box\neg A$;

(b) $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$;

(c) $(\Box A \rightarrow \Box B) \leftrightarrow \Box(A \rightarrow B)$;

(d) $(\Box A \vee \Box B) \leftrightarrow \Box(A \vee B)$.

5 Semantica per il sistema KD

Il sistema **KD** è un sistema modale usato per la *logica deontica*: l'operatore di necessitazione "$\Box$" si legge "*è doveroso che* ..." (si usa anche il simbolo "$\circ$" invece di "$\Box$"). La logica deontica non entra nel merito delle proprietà di specifici *sistemi normativi*, ma presuppone che i sistemi degni di considerazione siano razionali, e che abbiano la proprietà della *consistenza*. Non potremo avere simultaneamente che A *è obbligatorio* e $\neg A$ *è obbligatorio* e dunque i mondi possibili in cui questo vale (vedi le cornici *discrete*, proposizione 0.2 sezione 4) devono essere esclusi nello studio di tale logica.

Definizione (semantica per KD). Sia $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ una cornice di Kripke. Un mondo possibile w si dice *terminale* se $\{w' | w' \sqsubseteq w\} = \emptyset$.

La semantica per il sistema **KD** è basata sulla nozione di validità *in ogni cornice di Kripke senza mondi terminali.* Una formula $A \in \mathcal{L}^\Box$ è *valida in* **KD**, in simboli $\models_{\mathbf{KD}} A$, se per ogni cornice di Kripke $\mathcal{F}$ *senza mondi terminali* si ha $\models_{\mathcal{F}} A$. Una formula A è *conseguenza valida di* Γ *in* **KD** (in simboli $\Gamma \models_{\mathbf{KD}} A$) se per ogni cornice $\mathcal{F}$ *senza mondi terminali* si ha $\Gamma \models_{\mathcal{F}} A$.

Proposizione 0.1. (i) *Sia* $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ *una cornice di Kripke. Per ogni formula* A *si ha* $\models_{\mathcal{F}} (\Box A \wedge \Box\neg A) \to \bot$ *se e solo se nessun mondo in* W *è terminale.*

(ii) *Siano* $P_1, \ldots, P_n$ *atomi, siano* $A_1, \ldots, A_n$ *formule di* $A \in \mathcal{L}^\Box$ *e supponiamo che* $A[P_1/A_1, \ldots, P_n/A_n]$ *risulti da* A *per sostituzione simultanea di* P_i *con* A_i *per* $i \leq n$. *Allora* $\models_{\mathbf{KD}} A$ *implica* $\models_{\mathbf{KD}} A[P_1/A_1, \ldots, P_n/A_n]$.

Dimostrazione di (i). Sia $(W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ un modello di Kripke in cui nessun $w \in W$ è terminale. Allora per ogni $w \in W$ $w \Vdash \Box A$ se e solo se $w' \Vdash A$ per ogni $w' \sqsubseteq w$ e $w \Vdash \neg\Box A$ se e solo se $w' \nVdash A$ per ogni $w' \sqsubseteq w$. Poichè per ogni $w \in W$ c'è almeno un $w' \sqsubseteq w$, le due condizioni sono sempre incompatibili, e dunque $w \nVdash (\Box A \wedge \Box\neg A)$.

Sia $(W, \sqsubseteq)$ una cornice di Kripke in cui $w \in W$ è terminale. Per ogni modello di Kripke $\mathcal{M}$ su $\mathcal{F}$ abbiamo $w \Vdash (\Box A \wedge \Box\neg A)$ (vedi proposizione 0.2, sezione 4).

$\Box$

5.1 "Semantic tableaux" per KD

Consideriamo la seguente regola **KDR**:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\mathbf{KDR}$$

dove Γ può essere vuoto *ed inoltre può non esserci alcuna formula a destra di* $\Rightarrow$.

Lemma 1. *La regola* **KDR** *preserva la validità ed è semanticamente invertibile* (*rispetto alla semantica di Kripke per* **KD**).

Dimostrazione. La dimostrazione del Lemma 1 in sezione 4.1 si applica anche nel caso di una regola della forma

$$\mathbf{DR:}\quad \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Box\Gamma \Rightarrow}$$

Basti considerare che un modello di Kripke $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ che refuta il sequente-conclusione $\Box\Gamma \Rightarrow \bot$ contiene un mondo possibile $w \in W$ tale che per ogni $w' \sqsubseteq w$ abbiamo $w' \Vdash C$ per ogni $C \in \Gamma$. Poichè w non è terminale, un tale w' esiste e pertanto $\mathcal{M}$ refuta anche il sequente-premessa $\Gamma \Rightarrow \bot$.

$\Box$

La **Procedura** *"Semantic Tableaux"* per la logica **KD** è la stessa della logica **K**, eccetto che nel caso

(n+1) *Sottocaso (iii)*: Se in un sequente della forma

$$p_1, \ldots, p_h, \Box\Gamma \Rightarrow q_1, \ldots, q_\ell \tag{†}$$

abbiamo $p_i \neq q_j$ per ogni $i \leq h$ e $j \leq \ell$ ed inoltre non vi sono formule modali $\Box D$ a destra di $\Rightarrow$, allora la procedura continua invertendo la regola **DR**:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow}{\Box\Gamma \Rightarrow}$$

Notare che qualora l'insieme $\Box\Gamma$ sia vuoto allora questa istruzione consentirebbe di invertire il sequente vuoto all'infinito e la procedura *non terminerebbe*. In questo caso consideriamo il sequente vuoto come *aperto* e facciamo terminare la procedura su quel ramo.

Teorema. *La procedura "semantic tableaux" per la logica* **KD**, *data una formula A di $\mathcal{L}^\Box$ ritorna un albero di sequenti τ con $\Rightarrow A$ alla radice che ha le seguenti proprietà:*

- *se $\models_{\mathbf{KD}} A$, allora ogni potatura τ' di τ contiene solo sequenti validi;*
- *se $\not\models_{\mathbf{KD}} A$, allora si trovano sottoalberi aperti τ'' di τ, da cui si estraggono modelli di Kripke $\mathcal{M}$ senza mondi terminali e tali che $\not\models_{\mathcal{M}} A$.*

La dimostrazione è essenzialmente la stessa che nel caso di **K**. Quando l'albero di refutazione τ è aperto, otteniamo un sottoalbero aperto τ'' di τ da cui costruiamo un contromodello di Kripke $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$: in corrispondenza di un sequente vuoto $\Rightarrow$ poniamo un mondo w' che accede a se stesso ($w' \sqsubseteq w'$) e tale che $\mathcal{V}(w', P) = F$ per ogni P. *Per costruzione, tutte le foglie dell'albero τ'' sono di questo tipo e dunque il modello $\mathcal{M}$ non ha mondi terminali.*

$\Box$

Nota. Se usiamo la notazione degli ipersequenti

$$\frac{\Rightarrow [p_1, \dots, p_h \Rightarrow q_1, \dots, q_\ell], [\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1], \dots [\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m]}{p_1, \dots, p_h, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \dots, \Box D_m, q_1, \dots, q_\ell}$$

occorre non farsi trarre in inganno da questa nella costruzione dell'albero di refutazione e del contromodello. Nell'ipersequente-premessa della ramificazione disgiuntiva, il *primo sequente* senza formule modalizzate appartiene al frammento β del ramo sottostante, e β è nella relazione $\succ$ con i frammenti β_1, ..., β_m che si trovano al di sopra degli *altri sequenti* dell'ipersequente. Nel caso in cui Γ è non-vuoto e $m = 0$ abbiamo solo un altro sequente nell'ipersequente e procediamo invertendo la regola **DR**. Solamente nel caso in cui Γ sia vuoto ed $m = 0$ dobbiamo porre il sequente degenerato $[\Rightarrow]$ come secondo sequente dell'ipersequente, e nella costruzione del contromodello introdurremo un mondo possibile che ha accesso a se stesso nel quale a nessun atomo è assegnato il valore "vero".

5.1.1 Esercizio

Ponendo $\Diamond A =_{df} \neg\Box\neg A$, verificare se vale

$$\Box P \models_{\mathbf{KD}} \Diamond P.$$

6 Semantica per i sistemi K4 e K4D

Se concepiamo i mondi accessibili *epistemicamente*, cioè come stati di conoscenza, il sistema **K4** rappresenta un universo in cui le verità non si dimenticano.

Definizione (semantica per K4). Una cornice di Kripke $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ si dice *transitiva* se la relazione $\sqsubseteq$ è transitiva, cioè vale l'assioma

$$\forall w_2.\forall w_1.\forall w_0.(w_2 \sqsubseteq w_1 \land w_1 \sqsubseteq w_0) \to (w_2 \sqsubseteq w_0)$$

Una formula $A \in \mathcal{L}^\Box$ è *valida in* **K4**, in simboli $\models_{\mathbf{K4}} A$, se per ogni cornice di Kripke *transitiva* $\mathcal{F}$ si ha $\models_{\mathcal{F}} A$. Una formula A è *conseguenza valida di* Γ *in* **KD** (in simboli $\Gamma \models_{\mathbf{K4}} A$) se per ogni cornice *transitiva* $\mathcal{F}$ si ha $\Gamma \models_{\mathcal{F}} A$.

Proposizione 0.1. *Sia $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ una cornice di Kripke. Per ogni formula A si ha $\models_{\mathcal{F}} \Box A \to \Box\Box A$ se e solo se $\mathcal{F}$ è transitiva.*

(ii) *Siano $P_1, \dots, P_n$ atomi, siano $A_1, \dots, A_n$ formule di $A \in \mathcal{L}^\Box$ e supponiamo che $A[P_1/A_1, \dots, P_n/A_n]$ risulti da A per sostituzione simultanea di P_i con A_i per $i \leq n$. Allora $\models_{\mathbf{K4}} A$ implica $\models_{\mathbf{K4}} A[P_1/A_1, \dots, P_n/A_n]$.*

Dimostrazione di (i). Sia $(W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ un modello di Kripke su cornice transitiva. Dato $w \in W$, se $w \Vdash \Box A$ allora per ogni $w', w'' \in W$ tali che $w'' \sqsubseteq w'$ e $w' \sqsubseteq w$ abbiamo $w'' \sqsubseteq w$ per transitività e dunque $w'' \Vdash A$. Ne segue che $w' \Vdash \Box A$ e dunque $w \Vdash \Box\Box A$.

Sia $(W, \sqsubseteq)$ una cornice di Kripke in cui $w, w', w'' \in W$ sono tali che $w'' \sqsubseteq w'$ e $w' \sqsubseteq w$ ma $w'' \sqsubseteq w$. Costruiamo un modello di Kripke $\mathcal{V}$ ponendo

- $\mathcal{V}(w', P) = V$, per ogni $w' \in W$ tale che $w' \sqsubseteq w$,
- $\mathcal{V}(w'', P) = F$;
- $\mathcal{V}(w, P)$ arbitrario, per ogni w tale che $w' \neq w \neq w''$;
- $\mathcal{V}(w, Q)$ arbitrario, per ogni w ed ogni $Q \neq P$.

Allora $w \Vdash \Box P$ ma $w \nVdash \Box\Box P$.

$\Box$

6.1 "Semantic tableaux" per K4

Consideriamo la seguente regola **K4R**:

$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\textbf{K4R}$$

dove Γ può essere vuoto *ma deve esserci una formula a destra di* $\Rightarrow$.

Lemma 1. *La regola* **K4R** *preserva la validità ed è semanticamente invertibile (rispetto alla semantica di Kripke per* **K4***).*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ un modello di Kripke su cornice transitiva che refuta il sequente-conclusione $\Box\Gamma \Rightarrow \Box A$. Sia $w \in W$ tale che $\Box\Gamma \not\models_w \Box A$: allora per ogni $w' \sqsubseteq w$ e per ogni $C \in \Gamma$ abbiamo non solo $w' \Vdash C$ ma anche $w' \Vdash \Box C$, poichè la relazione $\sqsubseteq$ è transitiva, ma esiste $w_0 \in W$ tale che $w_0 \sqsubseteq w$ e $w_0 \nVdash A$. Dunque $\Gamma, \Box\Gamma \not\models_{w_0} A$ e pertanto $\mathcal{M}$ refuta anche il sequente-premessa $\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A$.

Conversamente, sia $\mathcal{M}' = (W', \sqsubseteq', \mathcal{V}')$ un modello di Kripke su cornice transitiva che refuta il sequente-premessa $\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A$, e sia $w_0 \in W$ un mondo tale che $\Gamma, \Box\Gamma \not\models_{w_0} A$. Costruiamo un modello $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ dove

- $W = W' \cup \{w\}$, dove w non compare in W';
- $\sqsubseteq \, = \, \sqsubseteq' \cup \{w_0 \sqsubseteq w\} \cup \{w' \sqsubseteq w | w' \sqsubseteq' w_0\}$;

- $\mathcal{V}$ coincide con $\mathcal{V}'$ su W' ed inoltre $\mathcal{V}(w, P)$ è un valore V o F arbitrario, per ogni atomo P.

Allora per ogni $C \in \Gamma$ abbiamo

$$w \Vdash \Box C \text{ se e solo se } \forall w' \sqsubseteq w.\ w' \Vdash C \text{ se e solo se } w_0 \Vdash C \text{ e } w_0 \Vdash \Box C;$$

poichè w ha accesso a w_0 ed a tutti i mondi accessibili da w_0; inoltre abbiamo $w \nVdash \Box A$ poichè $w_0 \nVdash A$ e $w_0 \sqsubseteq w$. In conclusione, $\Box\Gamma \not\models_w \Box A$.

$\Box$

La **Procedura** *"Semantic Tableaux"* per **K4** è la stessa che per **K**, eccetto che dopo una *ramificazione disgiuntiva* si inverte la regola **K4R** invece della regola **KR**. Il quadro è dunque

$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow D_1}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1}\textbf{K4R} \qquad \cdots \qquad \frac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow D_m}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m}\textbf{K4R}$$

$$\vdots$$

$$p_1, \ldots, p_h, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_m, q_1, \ldots, q_\ell \qquad (\dagger)$$

(se $p_i \neq q_j$ per ogni $i \leq h$ e $j \neq \ell$
ed inoltre se $m > 0$)

Table 3: Ramificazione Disgiuntiva in K4

Il Lemma 2 rimane vero, modificando la dimostrazione come segue. Supponendo che i sequenti $\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_j$ sono refutati da modelli $\mathcal{M}_j$, costruiamo un modello $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ che refuta $(\dagger)$ come nel caso di **K**, eccetto che la relazione di accessibilità $\sqsubseteq$ è la *chiusura transitiva* (ma non riflessiva) della relazione definita nel caso di **K**. (Verificare questa asserzione come esercizio).

Le proposizioni 2 e 3 rimangono valide, ma la proposizione 1 evidentemente non vale più nel caso della regola **K4R**: infatti la dimensione del sequente premessa $\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A$ può ben essere maggiore della dimensione del sequente conclusione $\Box\Gamma \Rightarrow \Box A$. In effetti se applichiamo la procedura, per esempio, al sequente S

$$\Box\neg\Box Q \Rightarrow \Box Q$$

dove Q è un atomo, la procedura non termina (verificare ciò). Si noti tuttavia che nell'unico ramo dell'albero di refutazione τ generato a partire da S la regola **K4R** viene invertita sempre nella stessa forma

$$\frac{\neg\Box Q, \Box\neg\Box Q \Rightarrow Q}{\Box\neg\Box Q \Rightarrow \Box Q}\,\mathbf{K4R}$$

Questa osservazione si può generalizzare. Ci basiamo sulla seguente proprietà fondamentale:

Proprietà della Sottoformula. *Ogni formula che compare in un albero di refutazione (per ogni sistema considerato) è una sottoformula del sequente radice.*

Dimostrazione. Per induzione sulla costruzione dell'albero di refutazione. Ispezionando delle regole invertite, osserviamo che ogni formula del sequente-premessa è una sottoformula (possibilmente identica) di una formula del sequente-conclusione.

$\Box$

Possiamo dire qualcosa di più.

Definizione. Le *occorrenze positive* [*negative*] delle sottoformule (delle formule che compaiono) in un sequente $S = \Gamma \Rightarrow \Delta$ sono definite induttivamente come segue:

- ogni occorrenza di una formula in Γ è *negativa* ed ogni occorrenza di formula in Δ è *positiva*;
- Se $A \wedge B$ o $A \vee B$ o $\Box A$ è una occorrenza *positiva* in S, allora A e B sono occorrenze *positive* in S;
- Se $A \wedge B$ o $A \vee B$ o $\Box A$ è una occorrenza *negativa* in S, allora A e B sono occorrenze *negative* in S;
- Se $A \rightarrow B$ o $\neg A$ è una occorrenza *positiva* allora A è una occorrenza *negativa* e B è una occorrenza *positiva* in S;
- Se $A \rightarrow B$ o $\neg A$ è una occorrenza *negativa* allora A è una occorrenza *positiva* e B è una occorrenza *negativa* in S.

In un sequente $\Gamma \Rightarrow \Delta$ la parte Γ che compare alla sinistra di $\Rightarrow$ si chiama l'*antecedente* e la parte a destra Δ il *conseguente* del sequente in questione. Una formula della forma $\Box A$ si dice *modalizzata*.

Vale il seguente fatto, che si dimostra come sopra per induzione sulla costruzione di τ e per ispezione delle regole invertite.

Proprietà della Sottoformula, raffinamento. *Per ogni sistema considerato finora, ogni formula che compare nell'antecedente* [*nel conseguente*] *di un sequente dell'albero di refutazione* τ *con radice* $\Rightarrow A$ *è una sottoformula negativa* [*positiva*] *di* A.

Sulla base della proprietà della sottoformula ci poniamo ora la seguente domanda: *quante applicazioni distinte della regola* **K4R** *possono comparire nell'albero* τ*, sia esso finito o infinito?*

Fatto 1. Se il sequente radice $\Rightarrow A$ contiene k sottoformule modalizzate negative e h sottoformule modalizzate positive, allora in un albero di refutazione τ generato a partire da $\Rightarrow A$ vi sono al più $2^k \cdot h$ sequenti distinti contenenti solo formule modalizzate.

$\square$

Fatto 2. Sia τ un albero di refutazione, sia $\mathcal{I}$ una applicazione della regola **K4R** in τ con sequente-conclusione S della forma $\Box\Gamma \Rightarrow \Box A$; sia $\mathcal{I}'$ un'altra applicazione di **K4R** in τ con sequente-conclusione $\Box\Theta \Rightarrow \Box B$ che compare "sopra" S (nel sottoalbero τ' di τ che ha S come radice). Allora $\Box\Gamma$ è un sottoinsieme di $\Box\Theta$.

$\square$

Modifichiamo la **Procedura** *come segue.* Consideriamo le applicazioni $\mathcal{I}_i$ delle regole **K4R** invertite nel *Sottocaso (iv)* dopo una ramificazione disgiuntiva: se il sequente-conclusione $\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_i$ di una regola $\mathcal{I}_i$ coincide con il sequente-conclusione di qualche applicazione $\mathcal{I}$ della regola **K4R** in τ sotto $\mathcal{I}_i$ allora la procedura termina sull'i-esimo ramo con il sequente-premessa $\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow D_i$ di $\mathcal{I}_i$, avendo verificato che esiste un *loop*.

Proposizione 1. *La procedura "semantic tableaux"* per **K4** *termina.*

Dimostrazione. Per il Fatto 1, se il sequente finale $\Rightarrow A$ contiene k sottoformule modalizzate negative e h sottoformule modalizzate positive, allora ogni ramo di τ può contenere al più $2^k \cdot h$ distinte applicazioni della regola **K4R**.

$\square$

Teorema. *La procedura "semantic tableaux" per la logica* **K4**, *data una formula* A *di* $\mathcal{L}^\Box$ *ritorna un albero di sequenti* τ *con* $\Rightarrow A$ *alla radice che ha* *le seguenti proprietà:*

- *se* $\models_{\mathbf{K4}} A$*, allora ogni potatura* τ' *di* τ *contiene solo sequenti validi;*
- *se* $\not\models_{\mathbf{K4}} A$*, allora si trovano sottoalberi aperti* τ'' *di* τ*, da cui si estraggono modelli di Kripke* $\mathcal{M}$ *su cornice transitiva e tali che* $\not\models_{\mathcal{M}} A$*.*

L'unica modificazione nella prova riguarda la costruzione del modello $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$, che viene definito per induzione su τ''. Come prima dividiamo τ'' in una sequenza di "segmenti di rami" $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tali che

$(*)$ la radice S_i di β_i è un sequente-premessa di una **K4R** oppure la radice $\Rightarrow A$ di τ'' e

$(*)$ la foglia F_i di β_i è il primo sequente di forma $(\dagger)$ che si incontra risalendo τ'' a partire da S_i, oppure una foglia di τ''.

Come prima, tra i segmenti β_i definiamo un ordine $\prec$ ponendo $\beta_i \prec \beta_j$ se e solo se
$(*)$ la radice S_i di β_i è il sequente-premessa di una applicazione $\mathcal{I}$ della regola **K4R** e
$(*)$ la foglia F_j di β_j è l'origine della ramificazione disgiuntiva di cui il sequente-conclusione di $\mathcal{I}$ è una delle premesse.

Tuttavia dobbiamo aggiungere altre relazioni in corrispondenza del *Sottocaso (iv)* modificato, quando la procedura si è fermata verificando l'esistenza di un *loop*. In questo caso si divrebbe invertire una regola $\mathcal{I}_j$ *esattamente uguale* ad una inferenza

$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}\mathcal{I}_i$$

e $\mathcal{I}_i$ compare *sotto* $\mathcal{I}_j$. Vi sono due possibili soluzioni.

Alberi di refutazione finiti con loops. Sia β_i il "segmento di ramo" che ha il *sequente-premessa* di $\mathcal{I}_i$ come radice e sia β_j il segmento la cui foglia $(\dagger)$ è immediatamente sotto il sequente conclusione di $\mathcal{I}_j$. Allora poniamo $\beta_i \prec \beta_j$.

Sia $\prec^*$ la *chiusura transitiva* di $\prec$.

- Poniamo $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$, dove *il ramo* β_i *è identificato con il mondo possibile* w_i;
- Definiamo $\sqsubseteq$ come segue: per ogni $w_i, w_j \in W$, poniamo $w_i \sqsubseteq w_j$ se e solo se $\beta_i \prec^* \beta_j$;
- definiamo $\mathcal{V}$ ponendo $\mathcal{V}(w_i, P) = V$ se e solo se P compare *alla sinistra di* $\Rightarrow$ *nel sequente di forma* $(\dagger)$ *che è la foglia di* β_i.

Per induzione sulla lunghezza di τ'', usando la proposizione 2, si dimostra che per ogni sequente S in τ'' vale $\not\models_{\mathcal{M}} S$, e dunque $\not\models_{\mathbf{K4}} \Rightarrow A$.

$\square$

Alberi infiniti senza loops. La seconda possibilità consiste nel *continuare la procedura su tutti i rami in cui si sia verificata l'esistenza di un loop.* Possiamo rendere la procedura interamente deterministica. Allora si ottiene un albero di refutazione infinito $\overline{\tau}$ in cui ogni ramo $\overline{\beta}$ ha la forma seguente. Se in $\overline{\beta}$ si è verificato per la prima volta un loop $\beta_i \succ \ldots \succ \beta_j \succ \beta_i$ di lunghezza k, allora $\overline{\beta}$ consiste di un tratto iniziale δ seguito dalla concatenazione di frammenti di ramo

$$\delta \succ \beta_i \succ \beta_{i,1} \succ \beta_{i,2} \succ \ldots \succ \beta_{i,k-1} = \beta_j \succ \beta_{i,k} = \beta_i \succ \ldots \succ \beta_{i,mk+p} \succ \ldots$$

dove $\beta_{i,mk+p} = \beta_{i,p}$ per tutti i $p < k$ e per tutti gli m. Come prima, sia $\prec^*$ la chiusura transitiva di $\prec$.

Definiamo un modello di Kripke infinito ponendo $W = \{w_1, \ldots, w_n, \ldots\}$, dove il ramo β_i è identificato con il mondo possibile w_i; definiamo $\sqsubseteq$ e $\mathcal{V}$ come sopra.

Proposizione 4. *In un modello di Kripke infinito $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ per* **K4** *la valutazione di ogni formula in ogni mondo possibile $w \in W$ dipende solo da un sottoalbero finito di $\mathcal{M}$.*

Dimostrazione. Per induzione sulla complessità logica della formula da valutare. Consideriamo la valutazione di una formula $\Box A$ in w:

(i) $w \Vdash \Box A$ se e solo se per ogni $w' \sqsubseteq w$ abbiamo $w' \Vdash A$;

(ii) $w \Vdash \Box A$ se e solo se per ogni ramo $\overline{\beta}$ del sottoalbero di $\mathcal{M}$ che ha w come radice, ed ogni mondo w' in $\overline{\beta}$ si ha $w' \Vdash A$.

(iii) $w \Vdash \Box A$ se e solo se per ogni sottoramo *finito* $\underline{\beta}$ della forma

$$w \sqsupseteq \ldots w_i \sqsupseteq w_{i,1} \sqsupseteq \ldots \sqsupseteq w_{i,k}$$

del sottoalbero di $\mathcal{M}$ che ha w come radice, ed ogni mondo w' in $\underline{\beta}$ si ha $w' \Vdash A$.

In *(iii)* $\underline{\beta}$ è un frammento iniziale di rami $\overline{\beta}$ in *(ii)*, ed i mondi $w_i \sqsupseteq w_{i,1} \sqsupseteq \ldots \sqsupseteq w_{i,k}$ corrispondono ad un loop $\beta_i \succ \beta_{i,1} \succ \ldots \succ \beta_{i,k}$ nella procedura.

$\square$

Note. (i) Come nel caso di **K** vi sarà un *mondi terminale* w (cioè un mondo w tale che nessun mondo è accessibile da w) in corrispondenza di un *sottocaso* *(iii)* della procedura, quando questa si è fermata per l'impossibilità di invertire una regola **K4R** *perchè nel conseguente del sequente* (†) *non compaiono formule modalizzate.*

(ii) I modelli di Kripke con alberi infiniti forniscono una semantica in un certo senso *più generale* di quella in cui la relazione di accessibilità produce dei loops. Nota che in un loop la proprietà transitiva induce relazioni $w' \sqsubseteq w'$ per tutti i mondi possibili in un loop.

6.1.1 Esercizi

Il sistema **K4D** è basato sugli assiomi

- **K**: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$;
- **D**: $\Box A \to \Diamond A$
- $\Box A \to \Box\Box A$ (*transitività*)

La semantica di **K4D** è basata sulla seguente definizione:

Una formula A è valida in **K4D** (in simboli $\models_{\mathbf{K4D}} A$) se e solo se A è valida in tutte le cornici transitive e senza punti terminali.

1. Verificare che gli assiomi **D** e *transitività* sono validi in una cornice di Kripke $\mathcal{F}$ se e solo se $\mathcal{F}$ è transitiva e senza punti terminali.

2. Definire la procedura *"Semantic Tableaux"* per **K4D**, enunciare e dimostrare il teorema fondamentale concernente la procedura.

7 Il sistema GL

Il sistema **GL** nasce dallo studio delle proprietà formali del predicato Pr dell'aritmetica di Peano (**PA**). $Pr(n)$ significa "*la formula denotata dal numero di Gödel n è dimostrabile in* **PA**". Dunque l'espressione $Pr(\ulcorner A \urcorner)$ formalizza in **PA** la relazione $\vdash_{\mathbf{PA}} A$; l'espressione $\ulcorner A \urcorner$ denota il *numero di Gödel* della formula A.

Tale predicato gioca un ruolo fondamentale nel secondo teorema di Gödel: la consistenza di **PA** si può esprimere come $\neg Pr(\ulcorner \bot \urcorner)$ e dunque il secondo teorema di Gödel si può esprimere così

$$\vdash_{\mathbf{PA}} \neg Pr(\ulcorner \bot \urcorner) \Rightarrow \vdash_{\mathbf{PA}} \bot.$$

Una generalizzazione del secondo teorema di Gödel è data dalla formula di Löb:

$$\vdash_{\mathbf{PA}} Pr(\ulcorner A \urcorner) \to A \Rightarrow \vdash_{\mathbf{PA}} A$$

Scrivendo "$\Box$" per "Pr" otteniamo l'assioma fondamentale della logca **GL** (dove "G" sta per Gödel e "L" per Löb):

$$\Box(\Box A \to A) \to \Box A$$

Allo sviluppo della ricerca sulla logica **GL** hanno contribuito particolarmente i logici italiani della scuola senese, il cui esponente principale è Roberto Magari. Il seguente risultato è particolarmente significativo:

Teorema di Solovay: *Consideriamo le interpretazioni* $(\ )^*$ *del linguaggio* $\mathcal{L}^\Box$ *nel linguaggio di* **PA** *che mappano atomi in formule chiuse di* **PA** *e tali che* $(A \wedge B)^* = (A^* \wedge B^*$, $(\neg A)^* = \neg A^*$ *ed inoltre* $(\Box A)^* = Pr(A^*)$. *Allora*

$$\vdash_{\mathbf{GL}} A \quad \textit{se e solo se per ogni interpretazione } (\ )^* \textit{ vale} \quad \vdash_{\mathbf{PA}} A^*$$

7.1 Semantica di GL

Definizione (semantica per GL). Una cornice di Kripke $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ si dice *ben fondata* se la relazione $\sqsubseteq$ è ben fondata, cioè non esistono sequenze infinite discendenti $\ldots w_2 \sqsubseteq w_1 \wedge w_1 \sqsubseteq w_0$.

Una formula $A \in \mathcal{L}^\Box$ è *valida in* **GL**, in simboli $\models_{\mathbf{GL}} A$, se per ogni cornice di Kripke *transitiva e ben fondata* $\mathcal{F}$ si ha $\models_{\mathcal{F}} A$. Una formula A è *conseguenza valida di* Γ *in* **GL** (in simboli $\Gamma \models_{\mathbf{GL}} A$) se per ogni cornice *transitiva e ben fondata* $\mathcal{F}$ si ha $\Gamma \models_{\mathcal{F}} A$.

Proposizione 0.1. *Sia* $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ *una cornice di Kripke. Per ogni formula* A *si ha* $\models_{\mathcal{F}} \Box(\Box A \to A) \to \Box A$ *se e solo se* $\mathcal{F}$ *è transitiva e ben fondata.*

(ii) *Siano* $P_1, \ldots, P_n$ *atomi, siano* $A_1, \ldots, A_n$ *formule di* $A \in \mathcal{L}^\Box$ *e supponiamo che* $A[P_1/A_1, \ldots, P_n/A_n]$ *risulti da* A *per sostituzione simultanea di* P_i *con* A_i *per* $i \leq n$. *Allora* $\models_{\mathbf{GL}} A$ *implica* $\models_{\mathbf{K4}} A[P_1/A_1, \ldots, P_n/A_n]$.

Dimostrazione di (i). (*"se"*) Sia $(W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ un modello di Kripke su cornice transitiva e ben fondata. Dato $w_0 \in W$, supponiamo $w_0 \not\Vdash \Box A$. Allora esiste un $w_1 \sqsubseteq w_0$ tale che $w_1 \not\Vdash A$. Se vale $w_1 \Vdash \Box A$, allora abbiamo $w_1 \not\Vdash \Box A \to A$, dunque $w_0 \not\Vdash \Box(\Box A \to A)$ e la formula di Löb vale in w_0.

Altrimenti supponiamo $w_1 \not\Vdash \Box A$: allora esiste un $w_2 \sqsubseteq w_0$ tale che $w_2 \not\Vdash A$. Se vale $w_2 \Vdash \Box A$, allora abbiamo $w_2 \not\Vdash \Box A \to A$, e poichè per transitività $w_2 \sqsubseteq w_0$ abbiamo ancora $w_0 \not\Vdash \Box(\Box A \to A)$ e la formula di Löb vale in w_0. E così via.

Poichè la cornice $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ è ben fondata, alla fine esisterà un $w_n \sqsubseteq w_{n-1} \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq w_0$ tale che w_n è terminale e $w_n \not\Vdash A$. Poichè w_n è terminale, (cioè non esiste w' tale che $w' \sqsubseteq w_n$) abbiamo $w_n \Vdash \Box A$ e dunque $w_n \not\Vdash$

$\Box A \to A$. Per transitività $w_0 \not\Vdash \Box(\Box A \to A)$ dunque in ogni caso la formula di Löb vale in w_0.

(*"solo se"*) Supponiamo ora che $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ non sia transitiva, cioè abbiamo $w_2 \sqsubseteq w_1 \sqsubseteq w_0$ ma $w_2 \not\sqsubseteq w_0$. Ponendo

- $\mathcal{V}(w_2, P) = F = \mathcal{V}(w_1, P)$,
- $\mathcal{V}(w, P) = V$ su ogni altro $w \in W$,
- $\mathcal{V}(w, Q)$ arbitrario per $Q \neq P$ e per ogni w,

abbiamo:

$w_1 \Vdash \Box P \to P$, perchè $w_2 \not\Vdash P$;

$w_0 \Vdash \Box(\Box P \to P)$, perchè $w_1 \Vdash \Box P \to P$, ed inoltre se $w' \neq w_1$, $w' \sqsubseteq w_0$ allora $w' \Vdash P$ e dunque $w' \Vdash \Box P \to P$;

$w_0 \not\Vdash \Box P$, perchè $w_1 \not\Vdash P$.

Infine supponiamo che $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ non sia ben fondata, cioè sia data una catena infinita

$$\mathcal{C} : \qquad \ldots \sqsubseteq w_n \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq w_1 \sqsubseteq w_0$$

Poniamo

- $\mathcal{V}(w_i, P) = F$ per ogni $w_i \in \mathcal{C}$;
- $\mathcal{V}(w, P) = V$ per ogni $w \notin \mathcal{C}$;
- $\mathcal{V}(w, Q)$ arbitrario per ogni w e $Q \neq P$.

Allora abbiamo $w_i \Vdash \Box(\Box P \to P)$ ma $w_i \not\Vdash \Box P$, per ogni $w_i \in \mathcal{C}$.

$\Box$

7.2 "Semantic tableaux" per GL

Consideriamo la seguente regola:

GLR:

$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma, \Box A \;\Rightarrow\; A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$$

(*dove c'è esattamente una formula a destra di* $\Rightarrow$).

Lemma 1. *La regola* **GLR** *preserva la validità ed è semanticamente invertibile (rispetto alla semantica di Kripke per* **GL***).*

Esercizio. Suggerimento: per dimostrare la invertibilità semantica considera un modello $\mathcal{M}$ che non sia discreto. Cioè supponendo $\Gamma, \Box\Gamma, \Box A \not\models_{\mathcal{M}} A$, considera un $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{M})$ in cui W ha almeno due elementi e la relazione $\sqsubseteq$ non sia vuota e dimostra che $\Box\Gamma \not\models_{\mathcal{M}} \Box A$

La **procedura** *"Semantic Tableaux"* per **GL** è la stessa che per **K4**, con la sola eccezione che dopo una ramificazione disgiuntiva si inverte non la regola **K4R**, ma la regola **GLR**.

La *proprietà della sottoformula* vale ancora, ma non nella sua forma raffinata, dato che la formula $\Box A$ positiva nel conseguente del sequente-conclusione di una applicazione di **GLR** passa nell'antecedente del sequente-premessa, diventando negativa.

Fatto 1. Per la proprietà della sottoformula, se il sequente finale $\Rightarrow A$ contiene k sottoformule modalizzate, allora ogni ramo di τ può contenere al più $2^k \cdot k$ distinte applicazioni della regola **K4R**.

Fatto 2. Sia τ un albero di refutazione, sia $\mathcal{I}$ una applicazione della regola **GLR** in τ con sequente-conclusione S della forma $\Box\Gamma \Rightarrow \Box A$; sia $\mathcal{I}'$ un'altra applicazione di **GLR** in τ con sequente-conclusione $\Box\Theta \Rightarrow \Box B$ che compare "sopra" S (nel sottoalbero τ' di τ che ha S come radice). Allora $\Box\Gamma$ è un sottoinsieme *proprio* di $\Box\Theta$, i.e., $\Gamma \subsetneq \Theta$.

Proposizione 1. *L'albero di refutazione τ è finito.*

Dimostrazione. Per il Fatto 2, risalendo un ramo qualsiasi dell'albero τ incontriamo applicazioni $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, ... della regola **GLR** in cui l'antecedente $\Box\Gamma_i$ dei sequenti-conclusione di $\mathcal{I}_i$ è crescente, cioè abbiamo $\Box\Gamma_1 \subsetneq \Box\Gamma_2 \subsetneq \dots$. Per il Fatto 1, esiste una applicazione $\mathcal{I}^*$ di **GLR** il cui antecedente Γ^* massimale, cioè *non possono esistere altre applicazioni della regola* **GLR** *sopra* $\mathbf{I}^*$. Di conseguenza, quando la procedura arriva ad un sequente (†) sopra $\mathcal{I}^*$, si possono avere solamente i *sottocasi (ii) o (iii) della procedura per il sistema* **K**.

$\Box$

Il Teorema fondamentale per **K4** si estende immediatamente al caso di **GL**, ma la prova della proposizione 2 mostra che la procedura non può entrare in loop. Pertanto nella costruzione del contromodello $\mathcal{M}$ ogni foglia di un albero aperto τ'' corrisponde ad un mondo terminale (cioè ad un mondo w tale che $w' \not\sqsubseteq w$ per ogni $w' \in W$), in conformità con la condizione della semantica per **GL** che richiede di considerare solo cornici *ben fondate*.

$\square$

8 I sistemi T ed S4

I sistemi **T** ed **S4** si ottengono da **K** e **K4**, rispettivamente, aggiungendo l'assioma $\Box A \to A$, che corrisponde alla condizione semantica che ogni mondo possibile abbia accesso a se stesso. Se i mondi possibili sono stati di conoscenza, allora questa ipotesi sembra sensata: se arrivo a conoscere A allora posso postulare che A sia vero nel mio presente stato di conoscenza. Se poi A è un enunciato matematico ed A è conosciuto attraverso una dimostrazione, allora l'assioma $\Box A \to \Box\Box A$ di **S4** si può interpretare con il postulato che tale conoscenza non si perde (nella memoria perfetta di un matematico idealizzato; il caso di **T** serve allora a modellizzare la conoscenza degli smemorati).

8.1 Semantica di T

Definizione (semantica di T). Una cornice di Kripke $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ si dice *riflessiva* se per ogni $w \in W$ vale $w \sqsubseteq w$. Un mondo possibile w si dice *terminale* se $\{w' | w' \sqsubseteq w\} = \emptyset$.

La semantica per il sistema **T** è basata sulla nozione di validità *in ogni cornice di Kripke riflessiva*. Una formula $A \in \mathcal{L}^{\Box}$ è *valida in* **T**, in simboli $\models_{\mathbf{T}} A$, se per ogni cornice di Kripke $\mathcal{F}$ *riflessiva* si ha $\models_{\mathcal{F}} A$. Una formula A è *conseguenza valida di* Γ *in* **T** (in simboli $\Gamma \models_{\mathbf{T}} A$) se per ogni cornice $\mathcal{F}$ *riflessiva* si ha $\Gamma \models_{\mathcal{F}} A$.

Proposizione 0.1. *Sia $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ una cornice di Kripke. Per ogni formula A si ha $\models_{\mathcal{F}} \Box A \to A$ se e solo se $\mathcal{F}$ è riflessiva.*

(ii) *Siano $P_1, \dots, P_n$ atomi, siano $A_1, \dots, A_n$ formule di $A \in \mathcal{L}^{\Box}$ e supponiamo che $A[P_1/A_1, \dots, P_n/A_n]$ risulti da A per sostituzione simultanea di P_i con A_i per $i \leq n$. Allora $\models_{\mathbf{T}} A$ implica $\models_{\mathbf{T}} A[P_1/A_1, \dots, P_n/A_n]$.*

Dimostrazione di (i). Sia $(W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ un modello di Kripke su cornice riflessiva. Allora per ogni $w \in W$ $w \Vdash \Box A$ se e solo se $w' \Vdash A$ per ogni $w' \sqsubseteq w$ e dunque anche per w.

Sia $(W, \sqsubseteq)$ una cornice di Kripke in cui per qualche $w \in W$ si ha $w \not\sqsubseteq w$. Ponendo

- $\mathcal{V}(w, P) = F$;
- $\mathcal{V}(w', P) = V$ per ogni $w' \neq w$;
- $\mathcal{V}(w, Q)$ arbitrario per ogni $Q \neq P$ e per ogni w.

si ha $w \not\Vdash \Box P \to P$.

$\Box$

Nota. Poichè ogni cornice riflessiva è senza mondi terminali, ogni formula valida in **KD** sarà valida anche in **T**. Ogni formula della forma $\Box A \to A$ è valida in **T** ma non necessariamente in **KD**.

8.1.1 "Semantic tableaux" per T

Le regole modali del calcolo dei sequenti per il sistema **T** sono la regola **KR** e la regola $\Box$-L.

KR:	**$\Box$-L:**
$\dfrac{\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$	$\dfrac{A, \Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

Table 4: Regole Modali di **T**

Lemma 1. *Le regole* **KR** *e* **$\Box$-L** *preservano la validità e sono semanticamente invertibili (rispetto alla semantica di Kripke per* **T***).*

Esercizio.

La regola $\Box$-L assomiglia a quelle per i connettivi logici proposizionali in quanto è semanticamente invertibile ed agisce *localmente*, modificando una sola formula e non tutte le formule nel contesto come le altre regole modali.

Vogliamo estendere la procedura "semantic tableaux" al sistema **T**. Non è possibile semplicamente estendere quella per **K** aggiungendo l'inversione della regola $\Box$-L, perchè questa regola provocherebbe immediatamente la non-terminazione della procedura. Possiamo però invertire la regola $\Box$-L, marcando le occorrenze di formule modali che sono state già analizzate attraverso la regola $\Box$-L ed evitando di analizzarle nello stesso ramo della procedura, *finchè non si arrivi ad invertire la regola* **KR**. Un modo di fare questo è usare sequenti con *due aree* nell'antecedente:

$$\Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta \tag{¶}$$

Nel sequente-premessa di una inferenza $\Box$-L scriviamo in $\Box\Theta$ la formula principale $\Box A$; solo le formula in Γ e Δ vengono analizzate.

Regole Proposizionali Classiche in T ed S4

right $\neg$*:*
$$\frac{A, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta, \neg A}$$

left $\neg$*:*
$$\frac{\Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta, A}{\neg A, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta}$$

right $\wedge$*:*
$$\frac{\Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

left $\wedge$*:*
$$\frac{A, B, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta}$$

right $\rightarrow$*:*
$$\frac{A, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow B, \Delta}{\Gamma/\Box\Theta \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta}$$

left $\rightarrow$*:*
$$\frac{\Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta}$$

right $\vee$*:*
$$\frac{\Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

left $\vee$*:*
$$\frac{A, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta}$$

Regole Modali di T

KR:
$$\frac{\Gamma/ \Rightarrow A}{/\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$$

$\Box$-L:
$$\frac{A, \Gamma/\Box A, \Box\Theta \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma/\Box\Theta \Rightarrow \Delta}$$

Table 5: Semantic Tableaux per T

Anche l'enunciato del Lemma 2 (sezione 4.1) deve essere modificato nel caso del sistema **T**, perchè in generale è falso: ad esempio i sequenti

$$p \Rightarrow q \qquad\qquad \Box\neg p \Rightarrow \Box q$$

sono falsificabili in **T** ma

$$p, \Box\neg p \Rightarrow q, \Box q$$

non è falsificabile in **T**, perchè in nessuna cornice riflessiva $p \wedge \Box\neg p$ è soddisfacibile. Tuttavia, tutti i sequenti della forma (†)

$$p_1, \ldots, p_h / \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_m, q_1, \ldots, q_\ell \qquad (\dagger)$$

che sono prodotti nella procedura "semantic tableaux" soddisfano il Lemma 2.

Definizione. Dato un sequente della forma (†), sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle sottoformule di $\Box\Gamma$ eccetto quelle che in $\Box\Gamma$ compaiono solamente entro il raggio d'azione di una occorrenza positiva dell'operatore "$\Box$". In altre parole, possiamo definire $\mathcal{S}$ induttivamente come segue:

- $\Box\Gamma, \Gamma \subset \mathcal{S}$;
- se $\neg A \in \mathcal{S}$, allora $A \in \mathcal{S}$;
- se $A \circ B \in \mathcal{S}$, dove "$\circ$" è un connettivo proposizionale, allora $\{A, B\} \subset \mathcal{S}$;
- se $\Box A \in \mathcal{S}$, dove $\Box A$ è una occorrenza positiva di una sottoformula in $\Box\Gamma$, allora $A \in \mathcal{S}$.

Allora esiste una partizione di $\mathcal{S}$ nelle classi seguenti:

- $A^+(\mathcal{S})$ $[A^-(\mathcal{S})]$, l'insieme delle sottoformule atomiche che compaiono positivamente [negativamente] in $\mathcal{S}$;
- $M^+(\mathcal{S})$ $[M^-(\mathcal{S})]$, l'insieme delle sottoformule modalizzate che compaiono positivamente [negativamente] in $\mathcal{S}$;
- $N^+(\mathcal{S})$ $[N^-(\mathcal{S})]$, l'insieme delle formule non atomiche e non modalizzate che compaiono positivamente [negativamente] in in $\mathcal{S}$.

È facile verificare il seguente fatto:

Fatto: *Se un sequente della forma (†) compare in un albero di refutazione τ in* **S4** *immediatamente sotto una ramificazione disgiuntiva, allora*

- $A^+(\mathcal{S}) \subseteq \{p_1, \ldots, p_h\}$ e $A^-(\mathcal{S}) \subseteq \{q_1, \ldots, q_\ell\}$;
- $M^+(\mathcal{S}) \subseteq \Box\Gamma$ e $M^-(\mathcal{S}) \subseteq \{\Box D_1, \ldots, \Box D_m\}$.

$\Box$

Lemma 2. *Dato un insieme finito $\Box\Gamma$ sia $\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le sottoformule di $\Box\Gamma$ eccetto quelle che in $\Box\Gamma$ compaiono solamente entro il raggio d'azione di una occorrenza positiva dell'operatore "$\Box$". Supponiamo inoltre che*

- $A^+(\mathcal{S}) \subseteq \{p_1, \ldots, p_h\}$ e $A^-(\mathcal{S}) \subseteq \{q_1, \ldots, q_\ell\}$;
- $M^+(\mathcal{S}) \subseteq \Box\Gamma$ e $M^-(\mathcal{S}) \subseteq \{\Box D_1, \ldots, \Box D_m\}$.

Allora i seguenti enunciati sono equivalenti:

(i) *il sequente* (†) *è falsificabile in* $\mathbf{T}$;

(ii) *il sequente*

$$p_1, \ldots, p_h, \Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_m, \Lambda, q_1, \ldots, q_\ell \qquad (\S)$$

è falsificabile in $\mathbf{T}$, *dove* $\Pi = N^+(\mathcal{S})$ *e* $\Lambda = N^-(\mathcal{S})$

(iii) *tutti i sequenti*

$$p_1, \ldots, p_h / \Rightarrow q_1, \ldots, q_\ell, \qquad /\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \quad \ldots \quad, /\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m \quad (\ddagger)$$

sono falsificabili in $\mathbf{T}$.

Dimostrazione. Possiamo ripetere l'argomento per il sistema $\mathbf{K}$, con le seguenti varianti. Se uno dei sequenti in (‡) non è falsificabile, allora come nel caso di $\mathbf{K}$ i sequenti (§) e (†) non sono falsificabili.

Conversamente, se tutti i sequenti in (‡) sono falsificati da modelli $\mathcal{M}_i$ con $0 \leq i \leq m$, allora costruiamo un modello $\mathcal{M}$ come nel caso di $\mathbf{K}$, eccetto che la relazione di accessibilità $\sqsubseteq$ è *la chiusura riflessiva* della relazione costruita nel caso di $\mathbf{K}$.

Dimostriamo che $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ falsifica (§). Sia w il mondo possibile alla "radice" della cornice $(W, \sqsubseteq)$. Per induzione sulla complessità delle formule G nel sequente (§)

$$p_1, \ldots, p_h, \Pi, \Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \ldots, \Box D_m, \Lambda, q_1, \ldots, q_\ell$$

si dimostra che $w \Vdash G$ se G compare nell'antecedente di (§) e $w \nVdash G$ se G compare nel succedente di (§). Infatti:

(i) $w \Vdash p_i$ per $i \leq h$, e $w \nVdash q_j$ per $j \leq h$;

(ii) se $G \in \Pi$ $[G \in \Lambda]$ allora $w \Vdash D$ $[w \nVdash D]$ segue dall'ipotesi induttiva applicata alle sottoformule di G;

(iii) se $G = \Box D_j$ con $1 \leq j \leq m$, allora $w \nVdash \Box D_j$ perchè esiste un mondo possibile w_j in $\mathcal{M}_j$ che falsifica $\Gamma \Rightarrow D_j$ e per costruzione di $\mathcal{M}$ abbiamo anche $w_j \sqsubseteq w$;

(iv) se $\Box C \in \Box\Gamma$, allora C compare nell'antecedente di (§) e per ipotesi induttiva $w \Vdash C$. Inoltre, per ogni mondo $w' \neq w$ tale che $w' \sqsubseteq w$, abbiamo $w' \Vdash C$: infatti per costruzione di $\mathcal{M}$ il mondo w' appartiene ad un modello $\mathcal{M}_i$ con $1 \leq i \leq m$, nel quale esiste un mondo w_i che falsifica $\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_i$ e w' è tale che $w' \sqsubseteq w_i$ e w' falsifica $\Gamma \Rightarrow D_i$ e dunque $w' \Vdash C$. Poichè abbiamo $w' \Vdash C$ per tutti i $w' \sqsubseteq w$, ne segue $w \Vdash \Box C$.

Poichè $\mathcal{M} = (W, \sqsubseteq, \mathcal{V})$ falsifica (§), "a fortiori" falsifica (†).

□

Proposizione 2. *Ogni regola applicata nella procedura "semantic tableaux" per* **T** *è valide e semanticamente invertibile.*

□

Nota. Possiamo visualizzare la dimostrazione del Lemma 2 usando l'espediente delle "due aree" anche per le formule principali delle regole proposizionali classiche, usando sequenti della forma

$$\Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta \tag{¶¶}$$

In Π $[\Lambda]$ scriviamo le formule principali delle inferenze proposizionali classiche sinistre [destre]. Le regole della procedura possono essere definite come segue:

Regole Proposizionali Classiche alternative per T ed S4

right $\neg$*:*
$$\frac{A, \Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda, \neg A/\Delta}{\Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta, \neg A}$$

left $\neg$*:*
$$\frac{\Gamma/\Pi, \neg A.\Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta, A}{\neg A, \Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta}$$

right $\wedge$*:*
$$\frac{\Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda, A \wedge B/\Delta, A \quad \Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda, A \wedge B/\Delta, B}{\Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta, A \wedge B}$$

left $\wedge$*:*
$$\frac{A, B, \Gamma/\Pi, A \wedge B, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta}{A \wedge B, \Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta}$$

right $\rightarrow$*:*
$$\frac{A, \Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda, A \rightarrow B/B, \Delta}{\Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow A \rightarrow B, \Delta}$$

left $\rightarrow$*:*
$$\frac{\Gamma/\Pi, A \rightarrow B, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta, A \quad B, \Gamma/\Pi, A \rightarrow B, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta}{A \rightarrow B, \Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta}$$

right $\vee$*:*
$$\frac{\Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda, A \vee B/\Delta, A, B}{\Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta, A \vee B}$$

left $\vee$*:*
$$\frac{A, \Gamma/\Pi, A \vee B, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta \qquad B, \Gamma/\Pi, A \vee B, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta}{A \vee B, \Gamma/\Pi, \Box\Theta \Rightarrow \Lambda/\Delta}$$

Applicando queste regole, otteniamo precisamente un sequente della forma (§) nell'enunciato del Lemma 2. Il Lemma 2 dimostra che anche nel caso di **T** l'informazione semantica essenziale concernente la falsificabilità di questo sequente è contenuta nei sequenti (‡) e che la nostra formulazione ufficiale più concisa è sufficiente per ottenere la validità e completezza della procedura.

Resta ora da dimostrare la terminazione della procedura.

Definizione. La *profondità modale $m(A)$ di una formula A* è definita induttivamente come segue:

$$m(P) = 0, \quad m(\neg A) = m(A), \quad m(\Box A) = 1 + m(A)$$

$$m(A \wedge B) = m(A \vee B) = m(A \to B) = max(m(A), m(B))$$

La definizione della *dimensione* $s(A)$ di una formula è definita come nel caso di **K** (vedi le sezioni 2.3 e 4.1), cioè

$$s(p) = 1 \qquad s(\bot) = 0 \qquad s(\neg A) = s(A) + 1 = s(\Box A)$$

$$s(A \wedge B) = s(A \vee B) = s(A \to B) = s(A) + s(B) + 1$$

Per i sequenti di **T**

$$S = C_1, \ldots, C_m / \Box E_1, \ldots, \Box E_k \Rightarrow D_1, \ldots, D_n$$

definiamo la *dimensione* $M(S)$ di S ponendo

$$M(S) \quad = \quad \left(\Sigma_{i=1}^{m} s(C_i) \cdot 2^{m(C_i)}\right) \; + \; \left(\Sigma_{i=1}^{k} s(E_i) \cdot 2^{m(E_i)}\right) \; + \; \Sigma_{j=1}^{n} s(D_j) \cdot 2^{m(D_j)}$$

Proposizione 1. *L'albero di refutazione τ è finito.*

Dimostrazione: Ad ogni passo della procedura la dimensione $M(S)$ del sequente diminuisce.

□

8.2 Semantica di S4

Definizione (semantica per S4). Una formula $A \in \mathcal{L}^{\Box}$ è *valida in* **S4**, in simboli $\models_{\mathbf{S4}} A$, se per ogni cornice di Kripke $\mathcal{F}$ *riflessiva e transitiva* si ha $\models_{\mathcal{F}} A$. Una formula A è *conseguenza valida di* Γ *in* **S4** (in simboli $\Gamma \models_{\mathbf{S4}} A$) se per ogni cornice $\mathcal{F}$ *riflessiva e transitiva* si ha $\Gamma \models_{\mathcal{F}} A$.

Proposizione 0.1. *Sia $\mathcal{F} = (W, \sqsubseteq)$ una cornice di Kripke. Per ogni formula A si ha $\models_{\mathcal{F}} (\Box A \to A) \wedge (\Box A \to \Box\Box A)$ se e solo se $\mathcal{F}$ è riflessiva e transitiva.*

(ii) *Siano* $P_1, \ldots, P_n$ *atomi, siano* $A_1, \ldots, A_n$ *formule di* $A \in \mathcal{L}^{\Box}$ *e supponiamo che* $A[P_1/A_1, \ldots, P_n/A_n]$ *risulti da* A *per sostituzione simultanea di* P_i *con* A_i *per* $i \leq n$. *Allora* $\models_{\mathbf{S4}} A$ *implica* $\models_{\mathbf{S4}} A[P_1/A_1, \ldots, P_n/A_n]$.

Dimostrazione. Si usano le prove per **T** e per **K4**, nelle sezioni 8.1 e 6.

$\Box$

8.2.1 "Semantic tableaux" per S4

Il sistema **S4** può essere assiomatizzato con due regole modali $\Box$-L e $\Box$-R.

$\Box$-R:	$\Box$-L:
$\dfrac{\Box\Gamma \Rightarrow A}{\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$	$\dfrac{A, \Box A, \Gamma \ \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma \ \Rightarrow \Delta}$

Table 6: Regole Modali di **S4**

Lemma 1. *Le regole* $\Box$-R *e* $\Box$-L *preservano la validità e sono semanticamente invertibili* (*rispetto alla semantica di Kripke per* **S4**).

Dimostrazione. Esercizio.

La **procedura** *"Semantic Tableaux"* è una combinazione di quella per **K4** e per **T**. Come nel caso di **T** usiamo sequenti con due aree nell'antecedente (vedi Tavola 7); la divisione dell'antecedente dei sequenti in due aree ha un significato computazionale piuttosto che logico. La forma della ramificazione disgiuntiva nella procedura per **S4** è illustrata dalla Tavola 8.

$\Box$-R:	$\Box$-L:
$\dfrac{\Box\Gamma / \Rightarrow A}{/\Box\Gamma \Rightarrow \Box A}$	$\dfrac{A, \Gamma / \Box A, \Box\Theta \Rightarrow \Delta}{\Box A, \Gamma / \Box\Theta \Rightarrow \Delta}$

Table 7: Regole modali nella procedura per **S4**

Lemma 2. *Sia* τ *un albero di refutazione prodotto dalla procedura "semantic*

$$\frac{\Gamma/\Box\Gamma \Rightarrow D_1}{/\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1}\Box\text{-}\mathbf{R} \qquad \cdots \qquad \frac{\Gamma/\Box\Gamma \Rightarrow D_m}{/\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m}\Box\text{-}\mathbf{R}$$

$$\vdots$$

$$p_1, \dots, p_h/\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \dots, \Box D_m, q_1, \dots, q_\ell \qquad (\dagger)$$

se $p_i \neq q_j$ per ogni $i \leq h$ e $j \neq \ell$ ed inoltre se $m > 0$.

Table 8: Ramificazione Disgiuntiva in **S4**

tableaux" per **S4** *e sia* ($\dagger$) *un sequente della forma*

$$p_1, \dots, p_h/\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \dots, \Box D_m, q_1, \dots, q_\ell \qquad (\dagger)$$

che compaia in τ *immediatamente al di sotto di una ramificazione disgiuntiva. Allora* ($\dagger$) *è falsificabile se e solo se tutti i sequenti*

$$p_1, \dots, p_h/ \Rightarrow q_1, \dots, q_\ell, \qquad /\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_1, \quad \dots \quad , /\Box\Gamma \Rightarrow \Box D_m$$

sono falsificabili.

Dimostrazione. Vedi la discussione del Lemma 2 per il sistema **T**.

Proposizione 1. *L'albero di refutazione* τ *è finito.*

Esercizio. (Considera le procedure per **K4** e per **T**).

Teorema. *La procedura "semantic tableaux" per la logica* **S4**, *data una formula* A *di* $\mathcal{L}^\Box$ *ritorna un albero di sequenti* τ *con* $\Rightarrow A$ *alla radice che ha le seguenti proprietà:*

- *se* $\models_{\mathbf{S4}} A$, *allora ogni potatura* τ' *di* τ *contiene solo sequenti validi;*
- *se* $\not\models_{\mathbf{S4}} A$, *allora si trovano sottoalberi aperti* τ'' *di* τ, *da cui si estraggono modelli di Kripke* $\mathcal{M}$ *su cornice riflessiva e transitiva e tali che* $\not\models_{\mathcal{M}} A$.

$\Box$

8.2.2 Esercizi

Poniamo $\Diamond A = \neg\Box\neg A$. Quali delle seguenti regole sono valide ed invertibili in **S4**?

1. $\dfrac{\Rightarrow \Box(A \to B)}{\Box A \Rightarrow \Box B}$ $\quad\dfrac{\Rightarrow \Diamond(A \to B)}{\Box A \Rightarrow \Diamond B}$ $\quad\dfrac{\Diamond A \Rightarrow \Box B}{\Rightarrow \Box(A \to B)}$ $\quad\dfrac{\Diamond A \Rightarrow \Diamond B}{\Rightarrow \Diamond(A \to B)}$

2. $\dfrac{\Rightarrow \Box(A \wedge B)}{\Rightarrow \Box A \wedge \Box B}$ $\quad\dfrac{\Rightarrow \Diamond(A \wedge B)}{\Rightarrow \Diamond A \wedge \Diamond B}$ $\quad\dfrac{\Rightarrow \Box A \wedge \Diamond B}{\Rightarrow \Diamond(A \wedge B)}$ $\quad\dfrac{\Rightarrow \Diamond A \wedge \Box B}{\Rightarrow \Diamond(A \wedge B)}$

3. $\dfrac{\Rightarrow \Box(A \vee B)}{\Rightarrow \Box A \vee \Diamond B}$ $\quad\dfrac{\Rightarrow \Box(A \vee B)}{\Rightarrow \Diamond A \vee \Box B}$ $\quad\dfrac{\Rightarrow \Diamond(A \vee B)}{\Rightarrow \Diamond A \vee \Diamond B}$ $\quad\dfrac{\Rightarrow \Box A \vee \Box B}{\Rightarrow \Box(A \vee B)}$