Semi-invarianti di quiver

20 marzo 2012

Sommario

Sia $Q = (Q_0, Q_1)$ un quiver connesso e finito. Le k-rappresentazioni di Q aventi fissato vettore dimensione sono parametrizzate da uno spazio vettoriale $\mathsf{Rep}(Q, \alpha)$ su cui agiscono in maniera naturale diversi gruppi algebrici. Le orbite dell'azione di $\mathsf{GL}(\alpha) := \prod_{i \in Q_0} \mathsf{GL}(\alpha_i)$ coincidono con l'insieme delle classi di isomorfismo di tali rappresentazioni. Se il quiver Q non presenta cicli orientati l'azione indotta sull'anello delle funzioni regolari $k[\mathsf{Rep}(Q, \alpha)]$ non ammette invarianti non banali, dunque è più interessante studiare l'azione di $\mathsf{SL}(\alpha) := \prod_{i \in Q_0} \mathsf{SL}(\alpha_i)$. Un insieme di generatori per l'algebra dei semi-invarianti $\mathsf{SI}(Q, \alpha) := k[\mathsf{Rep}(Q, \alpha)]^{\mathsf{SL}(\alpha)}$ così ottenuta può essere descritto semplicemente in termini di determinanti di opportune mappe tra rappresentazioni proiettive [SVdB].

Il tipo di rappresentazione del quiver Q si riflette sulla struttura dell'algebra $\mathsf{SI}(Q, \alpha)$, in particolare quest'ultima è ad intersezione completa solamente nel caso in cui Q sia di tipo Dynkin o Euclideo [SW].

Verranno presentati questi risultati all'interno di una descrizione dettagliata di tali algebre. Si accennerà inoltre alla loro utilità nella cosiddetta teoria geometrica degli invarianti (GIT) relativa alle rappresentazioni dei quiver [K].

[K] A. D. King, *Moduli of representations of finite-dimensional algebras*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 45, n° 180 (1994), 515–530.

[SVdB] A. Schofield, M. Van den Bergh, *Semi-invariants of quivers for arbitrary dimension vectors*, Indag. Math. 12 (2001), 125-138.

[SW] A. Skowronski, J. Weyman, *The algebras of semi-invariants of quivers*, Transformation Groups 5, n°4 (2000), 361-402.